Võ lâm bí tịch Oxy Cửu âm chân kinh

Version 1.0

I, Giới thiệu:

Đa số các em đều gặp trở ngại khi cày hình Oxy, khi các em xem bài giảng, nghe thầy cô giảng thì hiểu nhưng khi bắt tay vào làm thì lại không làm được, 1 phần là do các em chưa nắm vững các kiến thức căn bản, 1 phần là do chưa biết cách tư duy. Có nhiều em thì lại nói với anh rằng lúc làm bài thì dễ mà đi thi sao lại khó lại phải kẻ vẽ thêm đường phụ, lý do là ở đâu ?

Nhiều em cũng làm tốt Oxy nhưng sau khi đọc xong chuyên đề hệ phương trình ver 2.1 của anh thì lại cho rằng Oxy còn khó hơn cả hệ, và muốn anh chia sẻ những kinh nghiệm làm toán của mình.

Ở bí kíp này, anh sẽ tập chung dậy các em tư duy Oxy đó mới là mấu chốt của bài toán, còn thì giải chi tiết cho em 100 bài không bằng định hướng để em tự làm được 1 bài, trên mạng tài liệu giải chi tiết rất nhiều, sách cũng có rất nhiều các quyển vài trăm trang… nhưng thử hỏi khi đọc xong em lĩnh hội được bao nhiêu ?

Ở bí kíp này anh muốn chia sẻ 1 cách làm bài Oxy có thể là không mới nhưng cũng không quá gây khó cho các em.

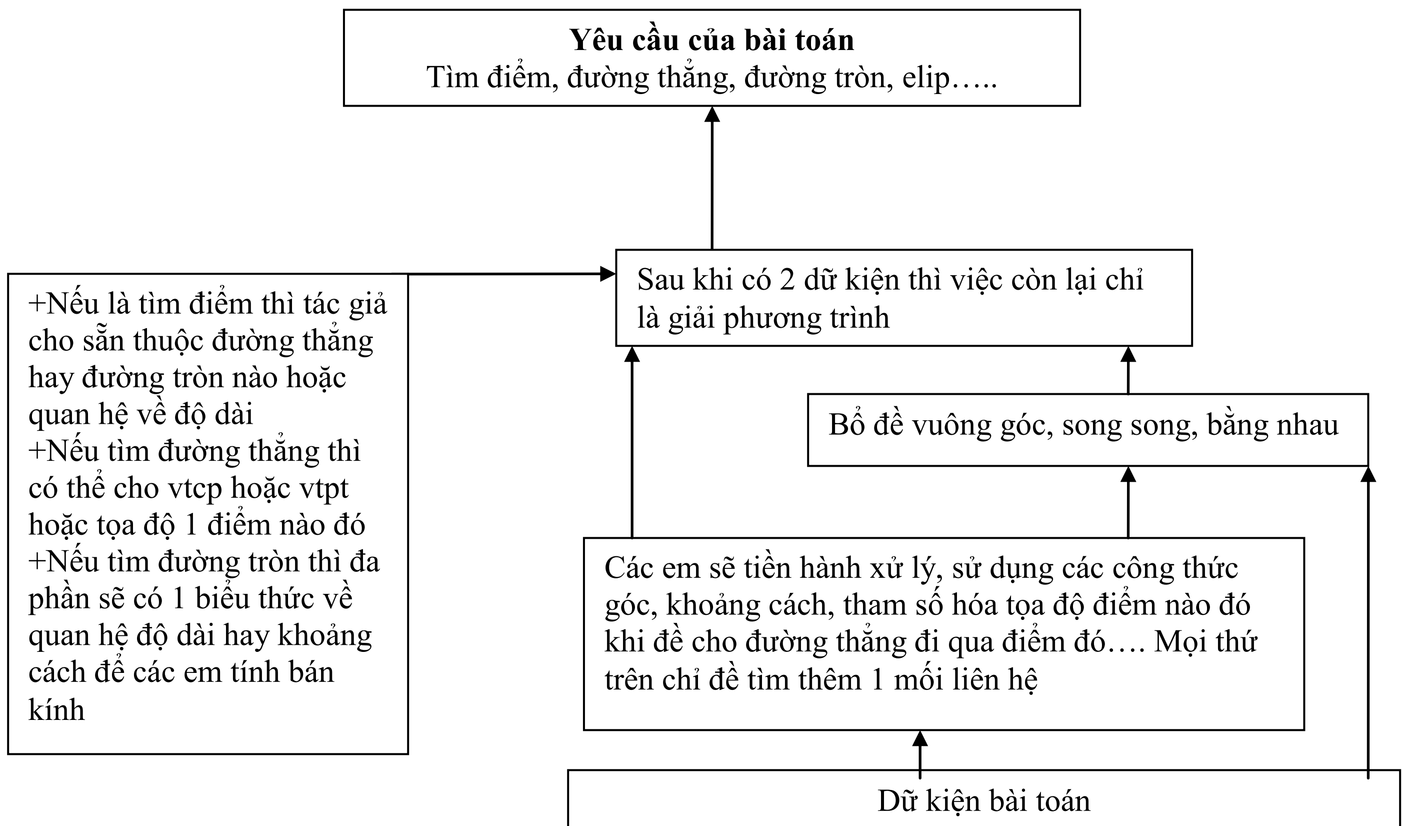
Anh cũng đã đi lang thang trên nhiều diễn đàn rồi xem các bài của các thầy nổi tiếng, nhưng anh thấy đây sẽ là tài liệu tổng hợp những phương án hay nhất và là duy nhất trên mạng, chưa từng có ai viết về nó. Anh không nổ đâu nhé, không lại đổi tên anh thành BLực (Boom Lực thì tội anh, keke cứ gọi anh là Thế Lực BK tức là anh Lực chuyên viết Bí Kíp hay anh Lực học ở Bách Khoa cũng được, hehe)

II, Đặt vấn đề

Trước khi nói về nội dung anh sẽ trình bày thì anh xin được nhắc lại một số kiến thức cơ bản:

Hình Oxy của ta có 3 đối tượng quan trọng là : Điểm; đường thẳng; đường tròn, elip…

Các đối tượng trên sẽ hoàn toàn xác định khi ta biết 2 điều kiện của nó, thường thì bài toán sẽ cho ta sẵn 1 dữ kiện, ta phải tự tìm dữ kiện còn lại thông qua các dữ kiện còn lại hoặc phải thông qua các bổ đề về vuông góc, bằng nhau, song song



Đó là tư duy để giải một bài Oxy, nhưng nếu đi từ dữ kiện đi lên thì anh nói thẳng là có vô vàn con đường cho em đi và đa phần là các em sẽ lạc lối.
Giống như sau:
Cùng mục tiêu là đỗ đại học có 2 con đường
+ Chăm học → học và làm bài chăm chỉ → Đỗ Đại Học
+ Đỗ Đại Học → thi được 24-27 điểm → mỗi môn 8-9 điểm → tập chung cày 1 điểm còn lại hoặc phải có bước đột phá (bí kíp hệ chẳng hạn →)☺7 điểm đầu thì dễ rồi chăm là được → Chăm học

Các em thấy chưa, cùng là 1 mục tiêu, 1 dữ kiện, nhưng nếu xác định đi từ cái ta có đến cái ta tìm kiếm thì sẽ mông lung hơn nhiều là ta lên hệ thống muốn có kết quả như vậy thì ta phải làm những cái gì và nghiễm nhiên khi ta thực hiện đúng trình tự đó, ta sẽ được kết quả.
Anh gọi cái này là tư duy ngược, còn trong quá trình học phải có bước đột phá đó chính là bổ đề phụ trong bài toán Oxy.

- Yêu cầu chung:

1. Có Tinh thần đỗ Đại Học và ý thức học tập, tháng cuối rồi đó các em ạ
2. Nắm được các kiến thức cơ bản trong mặt phẳng Oxy

III, Nội Dung

***Nội dung chính :**

1. Hệ thống kiến thức cơ bản SGK
2. Tư duy ngược để giải toán Oxy
3. Các Bổ Đề hình học hay dùng trong mặt phẳng Oxy và cách chứng minh (một số bổ đề quan trọng, một số chỉ có tính chất tham khảo)

Về bố cục của tài liệu gồm có:

A- Hệ thống kiến thức cơ bản SGK

B-Tư duy ngược

Gồm 5 ví dụ phân tích chi tiết
Các bài tự luyện là bài Oxy thi ĐH có đáp số

C – Bổ đề hình học: Tam giác, hình vuông, hình chữ nhật

Bổ đề trong tam giác
Bổ đề trong hình vuông, hình chữ nhật….
Một số ví dụ minh họa

Ở tài liệu anh này, phần lớn là anh chia sẻ những kinh nghiệm và tư duy làm bài, cũng như một số bổ đề cơ bản mà phụ trách chính phần này là bạn của anh là anh Nguyễn Văn Nam – chuyên Toán Vĩnh Phúc, phần bổ đề chủ yếu giải quyết các bài khó và có các dữ kiện đặc biệt….

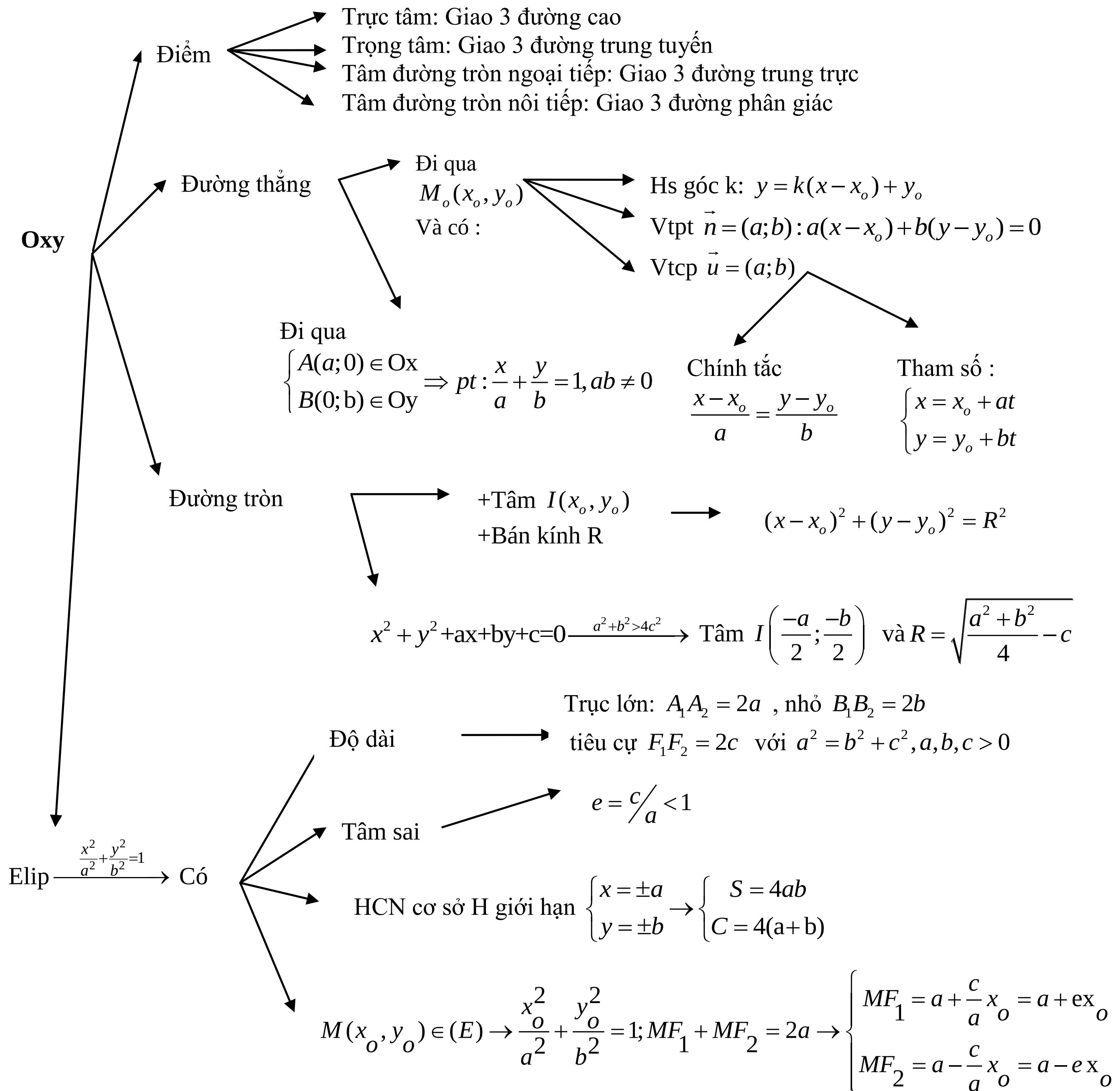
Hi vọng tài liệu này sẽ không làm các em thất vọng, Cảm ơn các em đã dài cổ hóng anh suốt thời gian qua ☺

Thời gian qua anh rất là vui khi nhận được sự đón nhận nồng nhiệt từ các em từ chuyên đề hệ, đó là niềm tự hào cũng như áp lực cho anh để cố gắng cho những tài liệu sau, anh đã cố gắng truyền đạt những điều dễ hiểu nhất tới các em, nhưng có hay hay không lại lại vấn đề khác, anh chỉ hi vọng là nó sẽ có ích thật nhiều cho các em khi hạ gục thằng Oxy, không còn cảm thấy lo sợ nó nữa

Lúc đầu anh cũng định trình bày kiến thức về hình vuông cơ sở nhưng thực sự thấy nó cũng không ứng dụng được nhiều nên anh đã bỏ qua phần này mà chỉ tập trung vào 3 phần chính là kiến thức cơ bản, tư duy nược, và bổ đề phụ.

Tài liệu version 1.0 nên còn có nhiều sai sót anh rất hi vọng sự góp ý của các em ☺ (đặc biệt là sai chính tả)

A- Hệ thống kiến thức cơ bản



Khoảng cách

$\begin{cases} A(x_1;y_1) \\ B(x_2;y_2) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1) \rightarrow AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

$\begin{cases} M(x_o;y_o) \\ \Delta: ax+by+c=0 \end{cases} \rightarrow d_{(M,\Delta)} = \dfrac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Delta' // \Delta, M \in \Delta' \rightarrow d_{(\Delta',\Delta)} = d_{(M,\Delta)}$

Góc

$\begin{cases} \Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ \Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \cos\varphi = |\cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})| = \dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}} = \cos(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$

$\Delta_1 \perp \Delta_2$: $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = 0$; $k_1.k_2 = -1 \leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1: y = k_1x + d_1 \\ \Delta_2: y = k_2x + d_2 \end{cases}$

Diện tích tam giác: $S = \dfrac{1}{2}a.h_a = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

R,r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp

p là nửa chu vi

B-Tư duy ngược

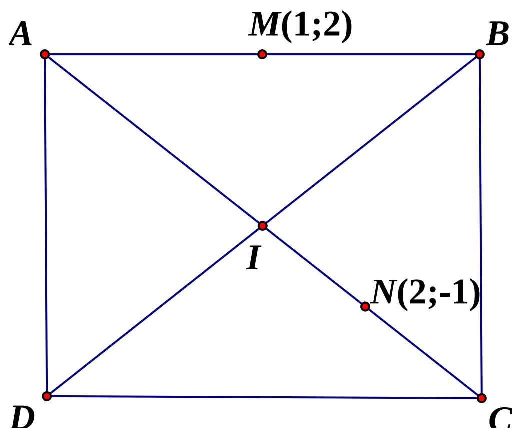
Anh nêu ra pp này để giúp hình thành tư duy cho các em ở bài toán Oxy, để định hướng rằng, muốn có KQ này thì ta cần tìm những gì, từ đó ta ghép nối với dữ kiện bài toán cho phù hợp

Khởi động ta sẽ chiến luôn bài A – 2014:

Ví dụ 1(ĐH-A-2014): Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có điểm M là trung điểm của đoạn AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho AN = 3NC. Viết phương trình đường thẳng CD biết rằng M(1;2) và N(2;-1).

Hướng dẫn

+ Bước 1 : Ta cần vẽ hình thật chuẩn



+ Bước 2: Xác định mục tiêu và phương hướng : bẻ khóa, tìm điểm mấu chốt

***Mục tiêu: Viết phương trình CD, trong khi tay trắng, vì không có dữ kiện gì trực tiếp cả**
Có 2 hướng chính để các em viết pt của 1 đường thẳng

1. Là tìm 2 điểm thuộc đường thẳng, ta đặc biệt quan tâm tới 2 đầu mút và trung điểm của đoạn CD, vì nó là các điểm đặc biệt
2. Ta tìm 1 điểm và 1 vecto chỉ phương hoặc pháp tuyến.

Một điều đặc biệt quan trọng khiến chung ta phải quan tâm là ở hình vuông hay hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành thì cái tọa độ tâm cực kì quan trọng, nó giúp ta rất nhiều trong việc biết tọa độ 1 đỉnh tìm tọa độ đỉnh đối diện và có khả năng dễ dàng tìm được nhờ 2 đỉnh còn lại.
Ở đây tâm hình vuông ABCD là I, nếu ta tìm được I thì :
+Dễ dàng xác định được C, vì N là trung điểm IC
+ Dễ dàng xác định được trung điểm của CD vì I là trung điểm của MP, với P là trung điểm CD
+ Ta cũng dễ dàng xác định được $\overrightarrow{IM}$ là vecto pháp tuyến của CD
………..
Vậy nếu có tọa độ của I, ta sẽ giải quyết được vấn đề bài toán.
Vậy câu hỏi bây giờ là làm thế nào để tìm I ?
Ta nhận thấy ngay mối liên hệ giữa IM và IN như sau:

$\begin{cases} IM = \dfrac{AI}{\sqrt{2}} \\ IN = \dfrac{AI}{2} \end{cases} \Rightarrow IM = \sqrt{2}IN$, vậy ta đã có 1 phương trình, ta phải tìm được 1 phương trình nữa

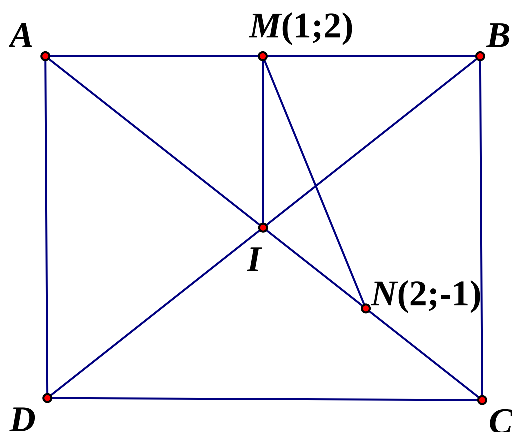
Đến đây mới vui nè : có nhiều em hỏi anh là? Anh ơi sao em biến đổi 1 hồi thì lại ta 0x = 0 , keke
Đó là do các em đã dùng 1 dữ kiện 2 lần, vậy làm sao để tránh điều đó ?
Ta phải biết những dự kiện gì ta dùng rồi, những dữ kiên gì ta chưa dùng thì mới được:

Từ dữ kiện là hình vuông: $\left[\begin{array}{l} hcn, AC \perp BD \\ \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 90, AB = BC = CD = DA \end{array} \right.$

Khi ta dùng $IM = \dfrac{AI}{\sqrt{2}}$ tức là ta đã dùng $\begin{cases} AM = MI \\ AM \perp MI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = BC \\ AB \perp BC \end{cases}$ vậy điều kiện hình vuông coi như đã dùng rồi

$IN = \dfrac{AI}{2}$ tức là AN = 3 NC đã được dùng

Tọa độ M, N thì phục vụ phương trình $IM = \sqrt{2}IN = \sqrt{2}x, x > 0$ rồi , vậy muốn tìm 1 pt nữa ở đâu ?
Ta để ý là độ dài $MN = \sqrt{10}$ ta chưa có dùng, vậy phải bám vào nó
Các em nối M với N, thấy tam giác IMN có góc $\widehat{NIM} = 135^o$



Các em áp dung định lý cosin : $MN^2 = IM^2 + IN^2 - 2IM.IN.Cos\widehat{NIM}$
Chúc các em cày tốt!

$\Leftrightarrow 10 = 2x^2 + x^2 - 2\sqrt{2}x^2.\frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 10 = 5x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

Tới đây thì ta có :

$$\begin{cases} IM = 2 \\ IN = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ 2x - 3 - 6y + 3 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x = 3y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y^2 - 4y = 0 \\ x = 3y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 0 \\ x = \frac{11}{5}, y = \frac{2}{5} \end{array} \right.$$ tới đây thì xong rồi

- Với $I(1;0)$

$C(3;2)$ và $\overrightarrow{IM} = (2;0)$ là vecto pháp tuyến của CD nên : $CD: y - 2 = 0$

- Với $I(\frac{11}{5};\frac{2}{5})$

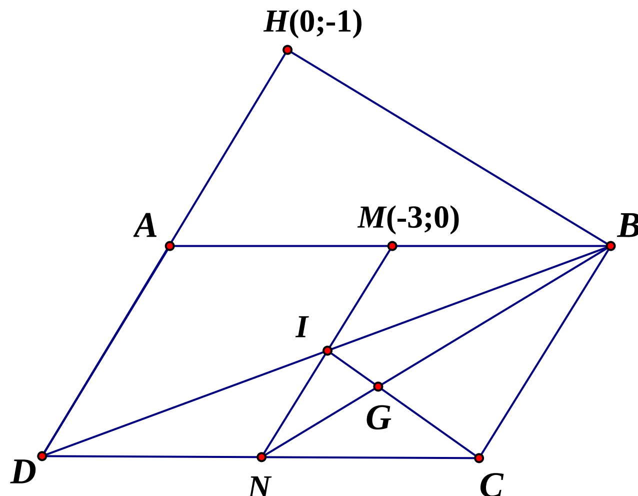
$C(\frac{9}{5};\frac{-12}{5})$ và $\overrightarrow{IM} = (-\frac{6}{5};\frac{8}{5})$ là vecto pháp tuyến: $-\frac{6}{5}(x-\frac{9}{5}) + \frac{8}{5}(y+\frac{12}{5}) = 0 \Leftrightarrow CD: 3x - 4y - 15 = 0$

Vậy có 2 phương trình CD là : $CD: y - 2 = 0$ hoặc $CD: 3x - 4y - 15 = 0$

Ví dụ 2: (ĐH – B – 2014): Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD. Điểm M(-3;0) là trung điểm của cạnh AB, điểm H(0;-1) là hình chiếu vuông góc của B trên AD và điểm G($\frac{4}{3}$;3) là trọng tâm của tam giác BCD. Tìm tọa độ các điểm B và D.

Hướng dẫn:

+ Bước 1: Vẽ cẩn thận cái hình, là bộ mặt của bài toán:



+ Bước 2: Xác định mục tiêu → Phương hướng : Tìm điểm mấu chốt, hạ gục bài toán

Mục tiêu của ta là tìm tọa độ B và D, ta để ý rằng 2 điểm này đối xứng với tâm I là quả tim của hình bình hành, ta cần bám vào nó khá nhiều, nên chỉ cần tìm đươc B và I là tìm được D

Các em gọi N là trung điểm của DC vì đằng nào lúc vẽ mình cũng phải xác định mới vẽ trọng tâm được với lại từ dữ kiện trọng tâm G có 2 khả năng là $\begin{cases} G = \dfrac{B+C+D}{3} \\ BG = \dfrac{2}{3}BN \end{cases}$ anh viết thế các em tự hiểu nhé, nó hoàn toàn tự nhiên chứ anh không hề sắp đặt gì ở đây cả. Về hình vẽ chỉ cần vậy thôi.

Mục tiêu bây giờ là tìm I và B, các em tháy rằng nếu có tọa độ I thì dễ àng suy ra B nhờ con đường I → N do I là trung điểm MN → B do $\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GN}$ vậy thực chất tở đây ta chỉ cần tìm 1 điểm là I hoặc B là xong, nếu tìm B thì quy trình ngược lại và cuối cùng anh đã chọn tìm B vì thấy được ngay 1 dữ kiện đề bài cho là vuông góc liên quan trực tiếp tới điểm B là $\overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{AH}$ thực ra thì tìm điểm nào cũng vậy thôi, nhưng các em thấy cái nào dễ thì làm trước.

Ta giả sử $B(x_o, y_o)$ thì do M là trung điểm AB nên : $A(-6-x_o, -y_o)$ suy ra $\overrightarrow{AH} = (x_o+6, y_o-1)$

Ta có: $\overrightarrow{HB} = (x_o, y_o+1)$

Theo giả thiết: $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HB} = 0 \Leftrightarrow x_o(x_o+6)+(y_o+1)(y_o-1) = 0$ (1)

Vậy ta đã có 1 phương trình, ta cần tìm 1 phương trình nữa, ở đây ta đã sử dụng 3 dữ kiện của đề bài là vuông góc và toạn độ của H, M và M là trung điểm AB vậy chúng ta chỉ còn 2 dữ kiện nữa là ABCD là hình bình hành và G là trọng tâm BCD, ta sẽ tập trung khai thác chúng

Với G là trọng tâm BCD nên : $\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GN} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o - \frac{4}{3} = -2(x_N - \frac{4}{3}) \\ y_o - 3 = -2(y_N - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{4-x_o}{2} \\ y_n = \dfrac{9-y_o}{2} \end{cases} \Leftrightarrow N\left(\dfrac{4-x_o}{2}; \dfrac{9-y_o}{2}\right)$

Rồi còn dữ kiện ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} AD = BC \\ AD // BC \end{cases}$

Tức là $MN // AD$ ta sử dụng 1 điều kiện này đã:

$\overrightarrow{MN} = \left(\dfrac{10-x_o}{2}, \dfrac{9-y_o}{2}\right)$

$MN // AD \to MN // AH \to \overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{10-x_o}{2} = k(x_o+6)(a) \\ \dfrac{9-y_o}{2} = k(y_o-1)(b) \end{cases}, k \neq 0$

Dễ thấy $y_o = 1$ không thỏa mãn (b) nên ta hoàn toàn yên tâm về sự khác 0 của 2 vế phương trình (b)

Ta nhân chéo (b) với (a) ta được : $(10-x_o)(y_o-1) = (x_o+6)(9-y_o) \Leftrightarrow x_o = 2y_o - 8$ (2)

Các em lấy (2) thay vào (1) được : $(y_o-1)(5y_o-15) = 0 \Leftrightarrow y_o = 3 \Rightarrow x_o = -2 \to B(-2;3)$

ở đây $y_o = 1$ bị loại rồi các em nhé, nó không thỏa mãn (b)

Nếu các em muốn yên tâm thì làm như này, đưa và vuông góc cho nó thành phép nhân đỡ nguy hiểm hơn

$MN // AD \to MN // AH \to MN \perp HB \to \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{HB}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{10-x_o}{2}\right)x_o + \left(\dfrac{9-y_o}{2}\right)(y_o+1) = 0$

$\Leftrightarrow x_o^2 + y_o^2 - 10x_o - 8y_o - 9 = 0(3)$

Từ (1) và (3) suy ra :

$\begin{cases} x_o^2+y_o^2+6x_o-1=0 \\ x_o^2+y_o^2-10x_o-8y_o-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o^2+y_o^2+6x_o-1=0 \\ 16x_o+8y_0+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o^2+y_o^2+6x_o-1=0 \\ y_o=-(2x_o+1) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o=-2, y_o=3 \\ x_o=0, y_o=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(-2;3) \\ B(0;-1) \end{array}\right.$

Nhiều em sẽ điêu đứng chỗ này đây, bản thân anh cũng đã điêu đứng 1 lần do tìm ra 2 điểm và không biết loại điểm còn lại, đó, cái gì nó cũng có 2 mặt, tránh vỏ dưa thì gặp vỏ dừa rồi :D

Hãy nhớ lại rằng còn 1 điều kiện = nhau của hình bình hành mà ta chưa hề dùng.

- Với $B(0;-1)$ ta có

Ta dùng điều kiện này : $AD = MN = BC$

$\overrightarrow{MN}=(5;5)$ và $N(2;5)$, $I(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$ suy ra $D(1;6)$; $C(3;4)$ nên $\overrightarrow{BC}=(3;5)$

Dễ thấy $MN \neq BC$ nên loại $B(0;-1)$

- Với $B(-2;3)$ ta có

Ta làm y chang như vây :D

$\overrightarrow{MN}=(6;3)$ và $N(3;3)$, $I(0,\frac{3}{2})$ suy ra $D(2;0)$; $C(4;6)$ nên $\overrightarrow{BC}=(6;3)$

Đó thấy ngay $MN = BC$ vậy là $B(-2;3)$ thỏa mãn.

Vậy $B(-2;3)$ và $D(2;0)$

Đây chính phương pháp tư duy ngược, xử lý điều kiện mà anh muốn trình bày, anh đã choáng khi làm xong mở giải ra xem của BGD, sao mà người ta có thể kẻ vẽ được như vậy ? trong khi mình không phải kẻ thêm đường gì, hoàn toàn tự nhiên và không gượng ép.

Ví dụ 3: ĐH – D – 2014 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có chân đường phân giác trong của góc A là điểm D (1; -1). Đường thẳng AB có phương trình 3x + 2y – 9 = 0, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình x + 2y – 7 = 0. Viết phương trình đường thẳng BC.

Hướng dẫn

Các em thao khảo bài cuối cùng, phần bài tập áp dụng bổ đề ở trang gần cuối nhé

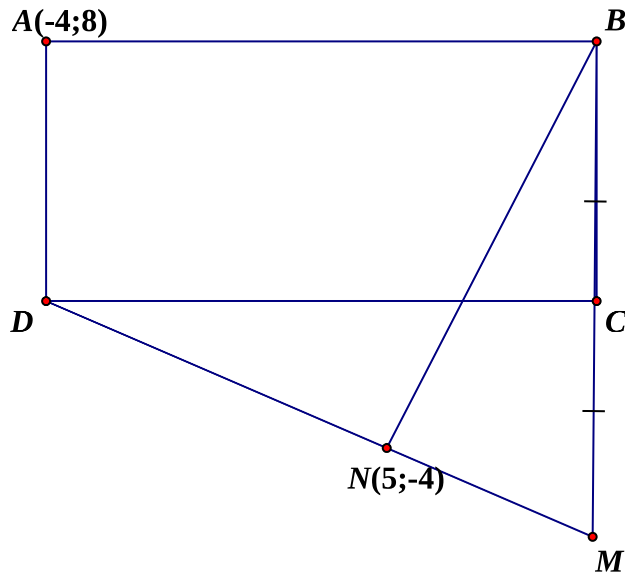
Ví dụ 4: ĐH – A – 2013 :

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm C thuộc đường thẳng d : $2x+y+5=0$ và $A(-4;8)$. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C, N là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng MD. Tìm tọa độ các điểm B và C, biết rằng N (5;-4).

ĐS : $B(-4;-7);C(1;-7)$

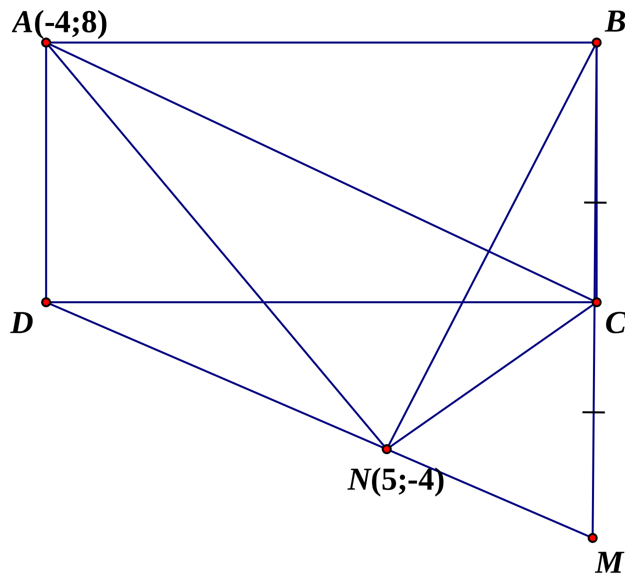
Hướng dẫn

Bước 1: Vẽ hình : Hình khi mới vẽ thì chỉ đơn giản như vậy thôi



Bước 2: Xác định mục tiêu, phương hướng : tìm điểm mấu chốt

Ở đây ta cần tìm B và C, ta biết trước 1 dữ kiện của C rồi nên chỉ cần biết 1 dữ kiện nữa là xong. Thực sự thì ngoài điều kiện C thuộc $2x+y+5=0$ thì không có điều kiện gì liên quan tới C cả, khi các em thấy điều này có nghĩa là các em phải tự đi tìm 1 điều gì đó đặc biệt liên quan tới C và các điểm có tọa độ còn lại , ở đây ta nối A với N vì độ dài AN có thể có ích cho ta, nối C với N, C với A, bao giờ những điểm có tọa độ sẵn rồi ta cũng sẽ liên hệ với điểm cần tìm xem có gì đặc biệt không, như bài kA-2014 đó ta cũng nối như vậy thì thấy được góc 135 độ, còn ở bài này thì sao ?



Lúc này tác dụng của việc vẽ chuẩn hình bắt đầu có tác dụng, ta thấy AN có thể vuông với CN, nếu vuông thì quá tốt, ta sẽ tìm được ngay tọa độ C.

Đây là lí do tai phải đi phân tích điểm nào cần tìm trước, điểm nào cần tìm sau để đi tìm các mối liên hệ cho phù hợp, nếu không vững vàng tư tưởng này thì trong phòng thi sẽ rất rối và cảm thấy ngột thở vì nghĩ mãi không ra

*Bây giờ ta sẽ đi chứng minh AN vuông góc với NC :

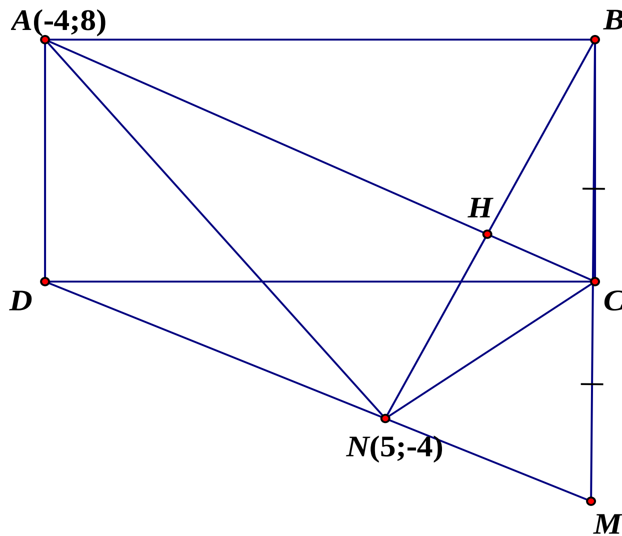
ở đây anh sử dụng cộng góc, em nào dùng tứ giác nội tiếp cũng được

Ta để phải bám chắc vào dữ kiện đề bài cho àm ta chưa dùng là : $BN \perp DM, BC = CM$

Trong tam giác vuông NBC thấy ngay NC là trung tuyến của tam giác nên $NC = BC = CM$

Nên BCN là tam giác cân tại C suy ra : $\widehat{HNC} = \widehat{HBC}$ (1)

Để ý chút nữa: Anh gọi thêm điểm H



Thì $ACMD$ là hình bình hành, nên $AC // DM \rightarrow AC \perp DM$

Tam giác BCN cân lại có CH là đường cao nên nó là đường trung tuyến luôn hay H là trung điểm của BN

Vậy tam giác ABN cũng cân thì AH vừa là đường cao, vừa là trung tuyến nên $\widehat{ANH} = \widehat{ABH}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra:

$\widehat{ANC} = \widehat{ANH} + \widehat{HNC} = \widehat{ABH} + \widehat{HBC} = \widehat{ABC} = 90$ vậy $AN \perp NC$ ta có :

Với C thuộc $2x + y + 5 = 0$ suy ra : $C(c, -2c-5)$

$\overrightarrow{AN} = (9; -12); \overrightarrow{NC} = (c-5, -2c-1)$

$AN \perp NC \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{NC} = 0 \Leftrightarrow 9(c-5) - 12(-2c-1) = 0 \Leftrightarrow c = 1 \rightarrow C(1; -7)$

Muốn tính tọa độ B ở đây thì ta tính thông qua H vì N ta biết rồi, H lại là trung điểm BN do đó ta cần viết phương trình AC và NB

Phương trình AC: $\frac{x+4}{1+4} = \frac{y-8}{-7-8} \Leftrightarrow 3x + y + 4 = 0$

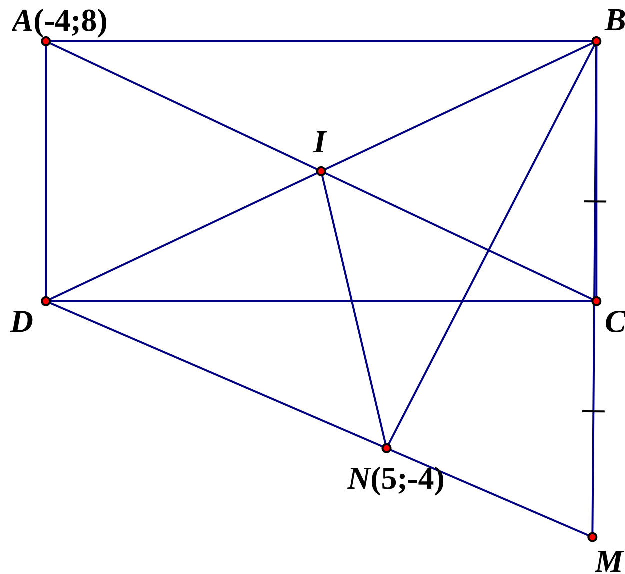
Phương trình NB qua N và vuông AC : $(x-5) - 3(y+4) = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 17 = 0$

Toa độ H là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 3x + y = -4 \\ x - 3y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{-11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow H\left(\frac{1}{2}; \frac{-11}{2}\right)$

Do H là trung điểm BN nên tọa độ H là $B(-4; 7)$

Đây là cách anh làm trong bài thi năm 2013 của anh, có thể các em đọc sẽ thấy khó, nhưng lúc trong phòng thi anh chỉ nghĩ được ra cách này thôi, còn 1 cách nữa anh tham khảo thêm của BGD thì như sau:

Như anh đã nói 2 bài trước, quả tim của hình vuông, hình bình hành, hình chữ nhật luôn là tâm I của nó, ta chỉ cần bám vào cái tâm này là được.



Trước hết ta tham số tọa độ $C(c,-2c-5)$

Bài toán cho ta những dữ kiện sau :

$\begin{cases} hcn_ABCD \\ BC = CM \\ BN \perp DM \end{cases}$ 2 điều kiện cuối ta thấy không liên hệ được nhiều với C nên bám vào điều kiện hình chữ nhật xem sao.

Ta bám luôn vào điểm I nữa, ta có I là trung điểm AC nên : $I(\frac{t-4}{2};\frac{-2t+3}{2})$

Bây giờ ta lại xử 2 điều kiện còn lại, Tam giác BND vuông có IN là trung tuyến BD do đó IN=IB hay IN=IA (tới đây dữ kiện hình chữ nhật coi như dùng hết rồi em nhé: 2 đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường mà, nên không được sử dụng lại dữ kiện hình chữ nhật nữa)

$$\left(5-\frac{t-4}{2}\right)^2+\left(-4-\frac{-2t+3}{2}\right)^2=\left(-4-\frac{t-4}{2}\right)^2+\left(8-\frac{-2t+3}{2}\right)^2 \leftrightarrow t=1$$

Suy ra C(1;-7)

Bây giờ còn điệu kiện đối xứng nữa thôi

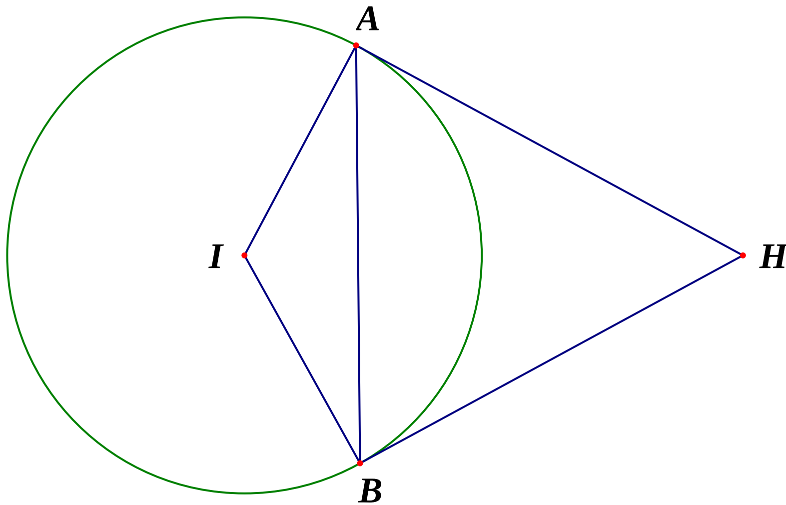
Các em làm tương tự như phần trên, chứng minh B đối xứng với N qua H rồi làm tương tự, sẽ ra KQ như vậy.

Ví dụ 5: ĐH – A – 2013 – NC :

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x-y=0$. Đường tròn (C) có bán kính $R=\sqrt{10}$ cắt Δ tại hai điểm A và B sao cho AB = $4\sqrt{2}$. Tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm thuộc tia Oy. Viết phương trình đường tròn (C).

Hướng dẫn

Bước 1: Các em vứ vẽ cẩn thận cái hình không cần thêm bớt gì cả.

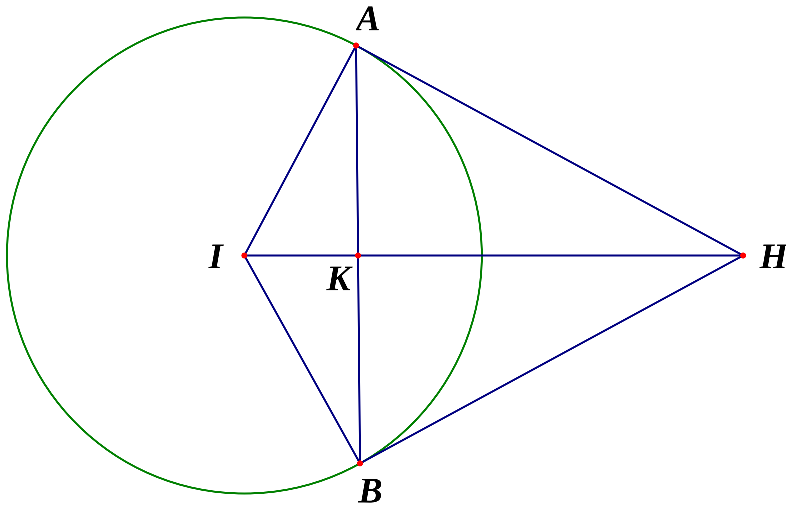


Bước 2: Xác định mục tiêu và tìm cách hủy diệt

Mục tiêu là viết đường tròn (C) có tâm mà ta tạm gọi là I với bán kính $R=\sqrt{10}$ vậy xác định tâm I nữa là xong, vậy ta cần 2 điều kiện liên quan tới tâm I.

ở đây họ cho độ dài AB tức là ta sẽ tìm 1 mối quan hệ liên quan tới độ dài với I và thường thì để tìm tọa độ 1 điểm cho dễ ta xác định đường thẳng đi qua nó.

Bản năng mách bảo ta rằng nối I với H vì nó quen thuộc rồi, tạm gọi giao điểm của AB và IH là K



Chúng ta bắt đầu chiến nhé

Các dữ kiện đề bài cho:

$$\begin{cases} R=\sqrt{10} \\ AB=4\sqrt{2} \\ AB: x-y=0 \\ 2_tiep_tuyen \\ H\in Oy \end{cases}$$ 2 tiếp tuyến thì ta suy được ra IAH là tam giác vuông vuông,AK là đường cao

còn dữ kiện $\begin{cases} R=\sqrt{10} \\ AB=4\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow IK=\sqrt{IA^2-KA^2}=\sqrt{10-8}=\sqrt{2}\Rightarrow HK=\dfrac{AK^2}{IK}=\dfrac{(2\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

Các em cứ tính hết tất cả các cạnh cũng được, tới đây là có điểm rồi mà.

Vậy còn 2 dữ kiện là $\begin{cases} AB: x-y=0 \\ H \in Oy \to H(0;h) \end{cases}$ ta để ý HK chính là khoảng cách từ H tới AB vậy ta dùng công thức khoảng cách : $d_{(H,AB)} = HK \Leftrightarrow \frac{|0-h|}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h=8 \\ h=-8 \end{array}\right.$ đến đây ta loại được h = -8.

Đố em nào biết tại sao ? keke, không chỉ có Hóa, Lý các em cần đọc kĩ mà Toán cũng vậy vì H thuộc tia Oy nên $h \geq 0$ các em học từ lớp 6 cái này rồi nhé :D

Đầy tiên anh tưởng toi rồi vì hết điều kiện mà loại nhưng đọc kĩ lại chút thì thấy được điều đó.

Vậy $H(0;8)$ Ta có ngay phương trình IH là $1.(x-0)+1.(y-8)=0 \Leftrightarrow x+y-8=0$ do IH vuông AB

Do đó tọa độ K là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=4$ lúc đầu anh định giải hệ $\begin{cases} I \in IK \\ IH = 2IK = 2\sqrt{2} \end{cases}$ nhưng nó sẽ ra 2 nghiệm nên mất công loại, các em hạn chế làm như thế này nhé, ta sử dụng vecto để đỡ phải loại nghiệm , để ý rằng $\overrightarrow{KH} = 4\overrightarrow{KI}$ cái này từ tỷ lệ độ dài ở trên đó các em

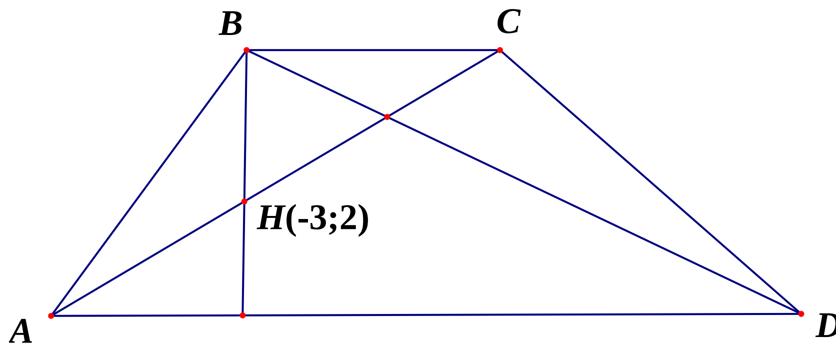
Vậy $K(4;4) \to I(3;5) \to (C): (x-3)^2 + (y-5)^2 = 10$

Ví dụ 6: ĐH – B – 2013 :

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau và AD = 3BC . Đường thẳng BD có phương trình x + 2y – 6 = 0 và tam giác ABD có trực tâm làH(-3 ; 2). Tìm tọa độ các đỉnh C và D

Hướng dẫn

Bước 1: Các em vứ vẽ cẩn thận cái hình không cần thêm bớt gì cả.



Bước 2: Xác định mục tiêu, phương hướng làm

*Mục tiêu là tìm tọa độ C, D vấn đề là tìm điểm nào trước ? Câu trả lời là điểm nào trước cũng được vì nó như nhau, thoạt nhìn thì tưởng D dễ hơn vì có phương trình BD rồi, nhưng mà để ý kĩ tí nữa thì ta cũng tìm được phương trình AC nên tọa độ C và D đều tham số hóa được

Tới đây là các em làm được 0,25 rồi, nhiều khi mỗi bài Oxy và bài Hệ ta chỉ cần sồ vào làm từ 0,25-0,5 còn dễ hơn là lấy hết cả 1 điểm bài đó.

Hồi anh thi để làm được 10 thì ăn cắm bút từ đầu tới lúc cuối đúng còn có gần 10 phút nữa là thu bài, mặt bừng bừng vì lo hết giờ, nhưng rất may tuy vội nhưng không để xảy ra sai sót.

Nên có nhiều em hỏi anh nên học Oxy hay Hệ ? thì bản thân anh khuyên học cả 2 kiếm mỗi cái một tí nếu khả năng mình chỉ tới mức đó thôi, còn khong là cứ phải chén hết.

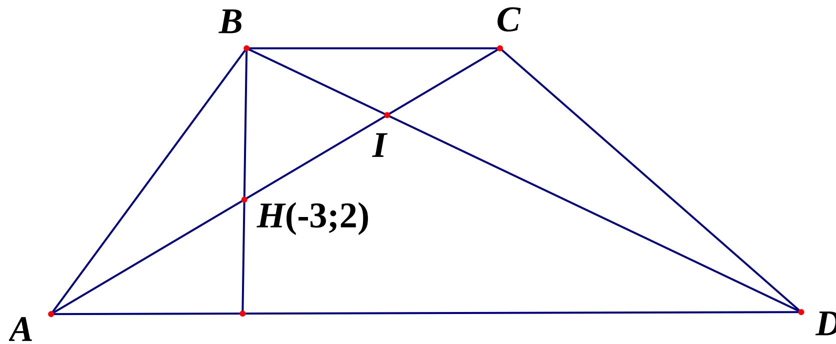
Tiếp tục nhé

ở đây đề bài cho :

$$\begin{cases} hinh_thang_can_ABCD \\ AD = 3BC \\ AC \perp BD \\ BD: x + 2y - 6 = 0 \\ H(-3;2)_va_la_truc_tam \end{cases}$$

ta đã dùng điều kiện $\begin{cases} AC \perp BD \\ H(-3;2) \\ BD: x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow AC: 2(x+3) - (y-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 8 = 0$

Bây giờ phải xử lý các điều kiện còn lại, để tìm thêm 1 điều kiện của C hoặc D
các em lại để ý chút, như anh đã nói ở các bài trước, các tứ giác của chúng ta đều có 1 điểm yếu là cái tâm, ta cứ xoáy vào cái tâm là ta sẽ làm được, tạm gọi tâm là I



ABCD là hình thang cân nên : IB = IC do đó IBC vuông cân, tương tự với tam giác IBH có góc $\widehat{IBH} = 90^0 - \widehat{IBC} = 45^o$ nên IBH cũng vuông cân.
Hoặc em nào nhìn rộng hơn 1 chút thì HBC là tam giác vuông cân do góc BCI = 45 độ mà có BI là đường cao nên BI cũng là đường trung tuyến luôn do đó I là trung điểm của HC
Các em chú ý là BH vuông BC tứ là ở đây ta đã dùng điều kiện H là trực tâm rồi nên BH vuông AD mà AD // BC nên mới có chuyện BH vuông BC nhé! ☺
Vậy là ta vừa tìm được thêm 1 mối quan hệ liên quan tới C. chúng ta giải phương trình tìm C thôi.
Do $C \in AC: 2x - y + 8 = 0 \to C(c; 2c+8)$

I là trung điểm HC nên : $I\left(\frac{c-3}{2}; c+5\right)$ thuộc BD nên :

$\frac{c-3}{2} + 2.(c+5) - 6 = 0 \Leftrightarrow c = -1 \Rightarrow C(-1;6)$

Bây giờ muốn tìm B thì ta lại phải tìm 1 điều kiện liên quan tới nó, ta để ý rằng AD = 3BC ta chưa hề dùng tới

Mà BC // AD nên : $\begin{cases} \frac{IB}{ID} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow ID = 3IC \\ IB = IC \end{cases}$ vậy là em D đã xác định rồi, keke

$I(-2;4) \to \overrightarrow{IC} = (1;2)$

Do $D \in BD: x + 2y - 6 = 0 \to D(6-2d, d)$

$ID = 3IC \Leftrightarrow (8-2d)^2 + (d-4)^2 = 9.5 \Leftrightarrow (d-4)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 1 \to D(4;1) \\ d = 7 \to D(-8;7) \end{array}\right.$ ở đây ta đã dùng hết điều kiện nên không có gì mà loại các em nhé, quan hệ về độ dài thường là sẽ cho ta 2 điểm, còn quan hệ vecto sẽ chỉ cho 1 điểm duy nhất thôi.

Vậy: $C(-1;6); D(4;1)$ hoặc $C(-1;6); D(-8;7)$

Anh vừa trình bày cho các em chi tiết 5 bài thi ĐH , ở đây anh chủ yếu hướng dẫn các em cách tư duy là chính, thay vì giải cho em tất cả các bài trong đề ĐH, các bài còn lại là phần việc của em có muốn lấy điểm 8 hay không, anh chỉ có thể dẫn các em tới giữa đường rồi đem con bỏ chợ thôi còn lại là các em phải tự tìm cho mình đích đến…..
Cố gắng lên các em.
Phía dưới là phần bài tập tự luyện còn qua phần này là phần bổ đề

***Dưới đây là các bài tập trong đề thi ĐH để các em tự luyện:**

Bài 1. (ĐH B2013−NC)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có chân đường cao hạ từ A là H $(\frac{17}{5};-\frac{1}{5})$, chân đường phân giác trong của góc A là D(5 ; 3) và trung điểm của cạnh AB là M (0 ; 1). Tìm tọa độ đỉnh C .
ĐS : $C(9;11)$

Bài 2. (ĐH D2013−CB)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có điểm $M(-\frac{9}{2};\frac{3}{2})$ là trung điểm của cạnh AB , điểm $H(-2;4)$ và điểm $I(-1;1)$ lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tìm tọa độ điểm C .
ĐS : $C(4;1); C(-1;6)$

Bài 3. (ĐH D2013−NC)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) : $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ và đường thẳng $\Delta: y-3=0$. Tam giác MNP có trực tâm trùng với tâm của (C) , các đỉnh N và P thuộc Δ , đỉnh M và trung điểm của cạnh MN thuộc (C). Tìm tọa độ điểm P .
ĐS : $P(-1;3); P(3;3)$

Bài 4. (ĐH A2012−CB)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho CN = 2ND. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình 2x – y–3=0.

Tìm tọa độ điểm A.
ĐS : $A(1;-1); A(4;5)$

Bài 5. (ĐH A2012−NC)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 = 8$. Viết phương trình chính tắc elip (E), biết rằng (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông.

ĐS : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$

Bài 6. (ĐH B2012−CB)

Trong mặt phẳng có hệ tọa độ *Oxy*, cho các đường tròn (C_1) : $x^2+y^2=4$, (C_2): $x^2+y^2-12x+18=0$ và đường thẳng *d*: $x-y-4=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc (C_2), tiếp xúc với *d* và cắt (C_1) tại hai điểm phân biệt *A* và *B* sao cho *AB* vuông góc với d.

ĐS : $(x-3)^2+(y-3)^2=8$

Bài 7. (ĐH B2012−NC)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình thoi *ABCD* có *AC = 2BD* và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $x^2+y^2=4$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua các đỉnh *A, B, C, D* của hình thoi. Biết *A* thuộc *Ox*.

ĐS : $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$

Bài 8. (ĐH D2012−CB)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Các đường thẳng AC và AD lần lượt có phương trình là $x + 3y = 0$ và $x - y + 4 = 0$; đường thẳng BD đi qua điểm M $(-\frac{1}{3}; 1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

ĐS : $A(-3;1); B(1;-3); C(3;-1); D(-1;3)$

Bài 9. (ĐH D2012−NC)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: $2x - y + 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc d, cắt trục Ox tại A và B, cắt trục Oy tại C và D sao cho AB = CD = 2.

ĐS : $(C):(x+1)^2+(y-1)^2=2; (C):(x+3)^2+(y+3)^2=10$

Bài 10. (ĐH A2011−CB)

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng Δ: $x+ y+ 2= 0$ và đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C), M là điểm thuộc Δ. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M, biết tứ giác MAIB có diện tích bằng 10.

ĐS : $M(2;-4); M(-3;1)$

Bài 11. (ĐH A2011−NC)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ .Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc (E), có hoành độ dương sao
cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

ĐS : $A(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}); B(\sqrt{2};-\frac{\sqrt{2}}{2})$ hoặc $A(\sqrt{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}); B(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$

Bài 12. (ĐH B2011−CB)

Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho hai đường thẳng Δ: $x - y - 4=0$ và *d*: $2x - y - 2= 0$. Tìm tọa độ điểm *N* thuộc đường thẳng *d* sao cho đường thẳng *ON* cắt đường thẳng Δ tại điểm *M* thỏa mãn *OM.ON*= 8.

ĐS : $N(0;-2); N(\frac{6}{5};\frac{2}{5})$

Bài 13. (ĐH B2011−NC)

Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* có đỉnh $B(\frac{1}{2};1)$. Đường tròn nội tiếp tam giác *ABC* tiếp xúc với các cạnh *BC*, *CA*, *AB* tương ứng tại các điểm *D*, *E*, *F*. Cho *D*(3; 1) và đường thẳng *EF* có phương trình $y - 3= 0$. Tìm tọa độ đỉnh *A*, biết *A* có tung độ dương.

ĐS : $A(3;\frac{13}{3})$

Bài 14. (ĐH D2011−CB)

Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* có đỉnh *B*(- 4; 1), trọng tâm *G*(1; 1) và đường thẳng chứa phân giác trong của góc *A* có phương trình $x - y - 1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh *A* và *C*.

ĐS : $A(4;3); C(3;-1)$

Bài 15. (ĐH D2011−NC)

Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho điểm *A*(1; 0) và đường tròn (*C*): $x^2+ y^2 - 2x + 4y - 5= 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (*C*) tại hai điểm *M* và *N* sao cho tam giác *AMN* vuông cân tại *A*.

ĐS : $\Delta: y=1; \Delta: y=-3$

Bài 16. (ĐH A2010−CB)

Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy* , cho hai đường thẳng d_1: $\sqrt{3}x+y=0$ và d_2: $\sqrt{3}x-y=0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (T), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

ĐS : $(T):(x+\frac{1}{2\sqrt{3}})^2+(y+\frac{3}{2})^2=1$

Bài 17. (ĐH A2010−NC)

Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(6; 6)$, đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh *AB* và *AC* có phương trình $x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh *B* và *C*, biết điểm E(1; −3) nằm trên đường cao đi qua đỉnh *C* của tam giác đã cho.

ĐS : $B(0;-4);C(-4;0)$ hoặc $B(-6;2);(2;-6)$

Bài 18. (ĐH B2010−CB)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, có đỉnh C(-4; 1), phân giác trong góc A có phương trình x + y – 5 = 0. Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương.

ĐS : $BC: 3x-4y+16=0$

Bài 19. (ĐH B2010−NC)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm A(2; $\sqrt{3}$) và elip (E): $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. Gọi F_1 và F_2 là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm); M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E); N là điểm đối xứng của F_2 qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2.

ĐS : $(C):(x-1)^2+(y-\frac{2\sqrt{3}}{3})^2=\frac{4}{3}$

Bài 20. (ĐH D2010−CB)

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(3;-7), trực tâm là H(3;-1), tâm đường tròn ngoại tiếp là I(-2;0). Xác định toạ độ đỉnh C, biết C có hoành độ dương.

ĐS : $C(-2+\sqrt{65};3)$

Bài 21. (ĐH D2010−NC)

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm A(0;2) và Δ là đường thẳng đi qua O. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ. Viết phương trình đường thẳng Δ, biết khoảng cách từ H đến trục hoành bằng AH.

ĐS : $\Delta:(\sqrt{5}-1)x-2\sqrt{\sqrt{5}-2}y=0;\Delta:(\sqrt{5}-1)x+2\sqrt{\sqrt{5}-2}y=0$

Bài 22. (ĐH A2009−CB)

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm I(6; 2) là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Điểm M(1; 5) thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng Δ: $x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

ĐS : $AB: y-5=0; AB: x-4y+19=0$

Bài 23. **(ĐH A2009−NC)**

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + +y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ và đường thẳng Δ: $x + my - 2m + 3 = 0$, với m là tham số thực. Gọi I là tâm của đường tròn (C). Tìm m để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.

ĐS : $m = 0; m = \frac{8}{15}$

Bài 24. **(ĐH B2009−CB)**

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) : $(x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$ và hai đường thẳng Δ_1 : x–y= 0, Δ_2 : x – 7y = 0. Xác định toạ độ tâm K và tính bán kính của đường tròn (C_1); biết đường tròn (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và tâm K thuộc đường tròn (C)

ĐS : $K(\frac{8}{5};\frac{4}{5}); R = \frac{2\sqrt{2}}{5}$

Bài 25. **(ĐH B2009−NC)**

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh A(-1;4) và các đỉnh B, C thuộc đường thẳng Δ : x – y – 4 = 0. Xác định toạ độ các điểm B và C , biết diện tích tam giác ABC bằng 18.

ĐS : $B(\frac{11}{2};\frac{3}{2}); C(\frac{3}{2};-\frac{5}{2})$ hoặc $B(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}); (\frac{11}{2};\frac{3}{2})$

Bài 26. **(ĐH D2009−CB)**

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có M (2; 0) là trung điểm của cạnh AB. Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình là 7x – 2y – 3 = 0 và 6x–y–4=0. Viết phương trình đường thẳng AC.

ĐS : $AC: 3x - 4y + 5 = 0$

Bài 27. **(ĐH D2009−NC)**

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) : $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Gọi I là tâm của (C). Xác định tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho $\widehat{IMO} = 30^0$.

ĐS : $M\left(\frac{3}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Bài 28. **(ĐH A2008−CB)**

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy viết phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.

ĐS : $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Bài 29. (ĐH B2008−CB)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy xác định tọa độ đỉnh C của tam giác ABC biết rằng hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm H(−1;−1), đường phân giác trong của góc A có phương trình x − y+ 2 = 0 và đường cao kẻ từ B có phương trình 4x +3y−1= 0.

ĐS : $C(-\frac{10}{3};\frac{3}{4})$

Bài 30. (ĐH D2008−CB)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) : $y^2=16x$ và điểm A(1;4). Hai điểm phân biệt B, C (B và C khác A) di động trên (P) sao cho góc $\widehat{BAC}=90^0$. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

ĐS : $I(17;-4)\in BC$

Bài 31. (ĐH A2007−CB)

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có A(0;2), B(-2;-2) và C(4;-2). Gọi H là chân đường cao kẻ từ B; M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC. Viết phương trình đường tròn đi qua các điểm H, M, N.

ĐS : (C): $x^2+y^2-x+y-2=0$

Bài 32. (ĐH B2007−CB)

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm A(2;2) và các đường thẳng: d_1: x + y – 2 = 0, d_2: x + y – 8 = 0.Tìm toạ độ các điểm B và C lần lượt thuộc d_1 và d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

ĐS : $B(-1;3);C(3;5)$ hoặc $B(3;-1);C(3;5)$

Bài 33. (ĐH D2007−CB)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) : $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng d: 3x–4y+m=0 . Tìm m để trên d duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho tam giá PAB đều.

ĐS : $m=19;m=-41$

Bài 34. (ĐH A2006−CB)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho các đường thẳng: d_1: x + y + 3 = 0, d_2: x – y – 4 = 0, d_3: x – 2y = 0. Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng d_3 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_1 bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng d_2.

ĐS : $M(-22;-11);M(2;1)$

Bài 35. **(ĐH B2006−CB)**

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ và điểm M(-3; 1). Gọi T_1 và T_2 là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Viết phương trình đường thẳng T_1T_2.

ĐS : $2x+y-3=0$

Bài 36. **(ĐH D2006−CB)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ và đường thẳng d: $x-y+3=0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên d sao cho đường tròn tâm M, có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C), tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

ĐS : $M(1;4); M(-2;1)$

Chuyên đề: Các bổ đề trợ giúp giải các bài toán hình học phẳng

Biên soạn : Nguyễn Văn Nam (chính) _ Nguyễn Thế Lực

❖ Tam Giác ABC – Một số bổ đề chỉ có tính chất tham khảo

Tài liệu:

- THTT 384,387,390,449
- Chuyên đề giải tích hình học phẳng Châu Ngọc Hùng
- Tuyển tập hình học giải tích trong mặt phẳng
- Tuyển chọn hệ phương trình +Oxy
- Kĩ thuật xử lý tọa độ hình học phẳng

1. Các dữ kiện khai thác được liên quan đến tam giác

   1.1 Tam giác cân tại A

   - AB=AC
   - Đường cao từ A≡Đường phân giác từ A≡Đường trung tuyến từ A
   - $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

   1.2 Tam giác vuông tại A

   - $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$
   - A thuộc đường tròn đường kính BC

   1.3 Tam giác vuông cân

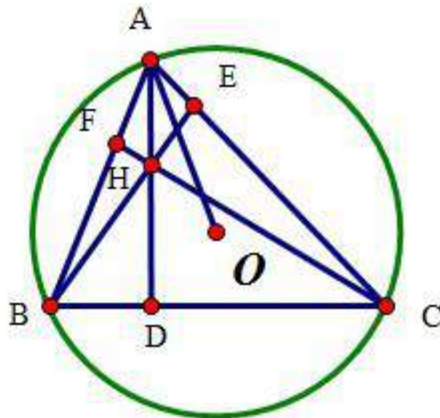
   Tổng hợp các điều kiện cân và vuông

2. Các đại lượng liên quan đến tam giác

   - Điểm: Trực tâm H, trọng tâm G, tâm O đường tròn ngoại tiếp, tâm I đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn bàng tiếp J_A, J_B, J_C tương ứng nằm trong góc A, B, C)
   - Đường cao, trung tuyến, phân giác trong, ngoài, trung trực, ơ − le
   - Đường tròn: ngoại tiếp tâm O, nội tiếp tâm I, bàng tiếp tâm J, ơ-le

3. Các tính chất cơ bản trong tam giác

   3.1. Các quan hệ bằng nhau



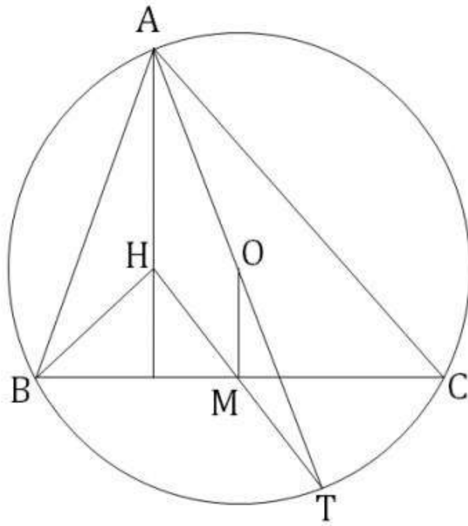
AD, BE, CF là 3 đường cao hạ từ A, B, C

$\widehat{HAB} = \widehat{HCB}$ (cùng phụ với $\widehat{FBD}$

$\widehat{HAB} = \widehat{OAC}$ (do $\widehat{HAB} = 90^o - \widehat{ABC} =$

$\frac{1}{2}(180^o - 2.\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}(180^o - \widehat{AOC}) = \widehat{OAC})$

3.2 Mối quan hệ trực tâm H và tâm O: $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$



Gọi M là trung điểm BC, T đối xứng với A qua O => AT là đường kính đường tròn tâm O

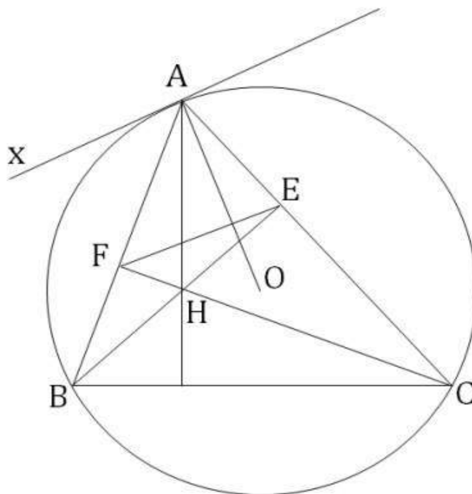
B, C thuộc đường tròn đường kính AT nên BA⊥BT; CA⊥CT (1)

H là trực tâm nên BA⊥CH; CA⊥BH (2)

Từ (1) và (2) suy ra CH//BT; BH//CT => BHCT là hình bình hành, có M là trung điểm đường chéo BC nên M cũng là trung điểm đường chéo HT; O là trung điểm AT => OM là đường trung bình của tam giác AHT

⇨ $\begin{cases} OM//AH \\ AH = 2OM \end{cases}$ => $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$

3.3 Tính chất AO⊥EF



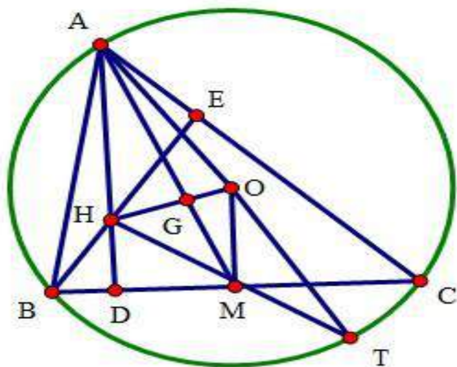
BE, CF là 2 đường cao hạ từ B, C. Kẻ tiếp tuyến tại A của đường tròn tâm O

⇨ $\widehat{xAB} = \widehat{ACB}$

$\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^o$ => BFEC là tứ giác nội tiếp => $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$

Do đó, $\widehat{xAB} = \widehat{AFE}$ => Ax//EF mà AO ⊥Ax nên AO⊥EF

3.4 $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$

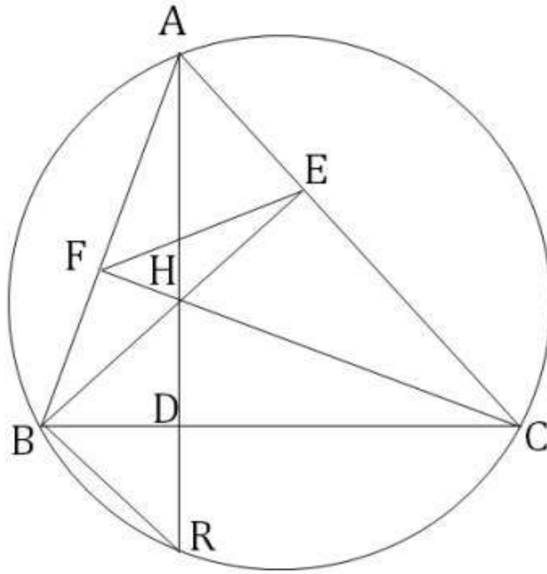


Trung tuyến AM của tam giác ABC, T đối xứng với A qua O.

Theo 3.2, ΔAHT có M là trung điểm của HT, => AM là trung tuyến của ΔAHT, có tỉ số $\frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$ => G cũng là trọng tâm tam giác AHT => $\frac{HG}{GO} = \frac{2}{3}$

=> $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$

3.5 Điểm R đối xứng với H qua BC => R thuộc đường tròn (O)

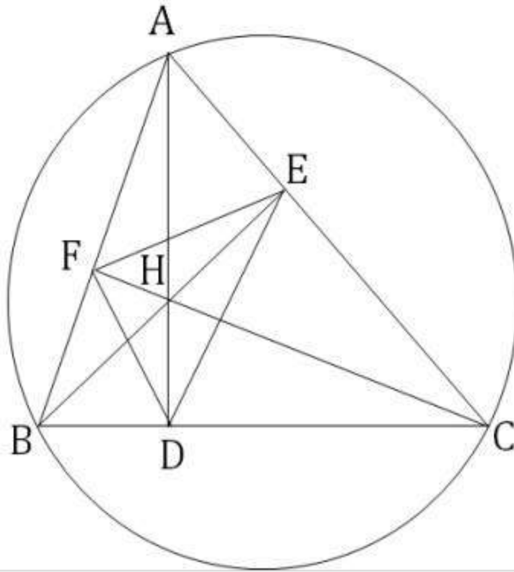


R, H đối xứng với nhau qua BC nên $\widehat{HBC} = \widehat{RBC}$

H là trực tâm => theo (3.1) thì $\widehat{HBC} = \widehat{HAC}$

Do đó, $\widehat{RBC} = \widehat{HAC}$ => RBAC nội tiếp => R ∈ (O)

3.6 D, E, F là chân đường cao hạ từ A, B, C => H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF



Chứng minh DH là phân giác $\widehat{EDF}$

BFHD, CEHD là 2 tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{HDF} = \widehat{HBF}; \widehat{HDE} = \widehat{HCE}$$

Mà theo 3.1, $\widehat{HBF} = \widehat{HCE}$

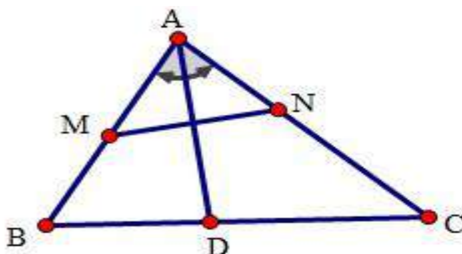
Suy ra $\widehat{HDF} = \widehat{HDE}$

Tương tự, EH, FH là phân giác góc $\widehat{FED}, \widehat{EFD}$

➔ H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF

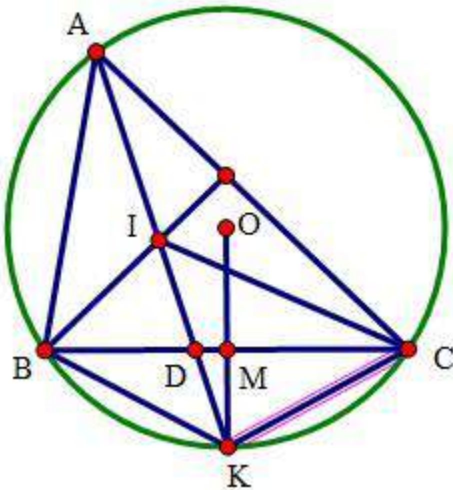
3.7 Tính chất đối xứng của đường phân giác

AD là phân giác trong góc A của tam giác ABC. M là điểm bất kì trên AB, N là điểm đối xứng với M qua AD => N ∈AC



Do M, N đối xứng với nhau qua AD nên $\widehat{MAD} = \widehat{NAD}$ => AN, AC trùng nhau => N∈AC

3.8 Phân giác trong AD cắt (O) tại K => K là tâm đường tròn ngoại tiếp IBC



Chứng minh KI=KB

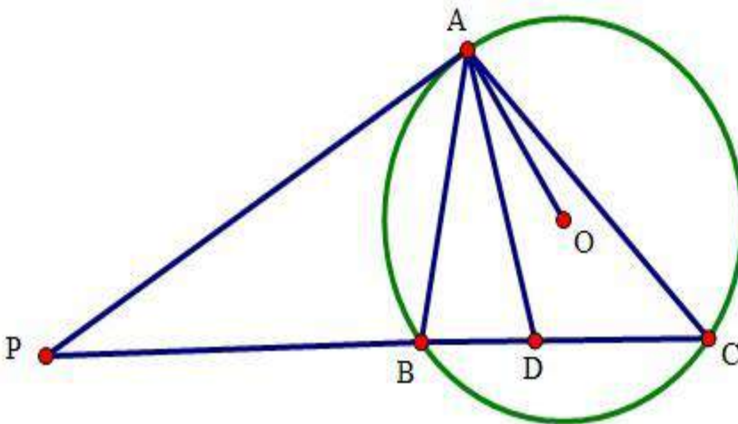
$\widehat{IBK} = \widehat{IBC} + \widehat{KBC} = \widehat{IBA} + \widehat{KAC} = \widehat{IBA} + \widehat{KAB} = \widehat{KIB}$
=> tam giác KIB cân tại K

$Tương\ tự, tam\ giác\ KIC\ cân\ tại\ K \Rightarrow KI = KC$

Do đó, K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC

Lưu ý: K cũng là điểm chính giữa cung BC không chứa A => OK⊥BC

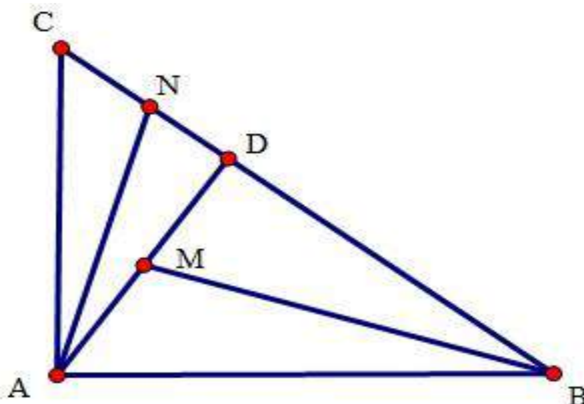
3.9 Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại P. AD là phân giác trong góc A => PA=PD



$\widehat{PAD} = \widehat{PAB} + \widehat{BAD} = \widehat{ACB} + \widehat{DAC} = \widehat{ADP}$ => tam giác PAD cân tại P => PA=PD

3.10 Tam giác ABC vuông tại A. AD là đường cao. M∈AD, N∈CD

- Nếu M, N là trung điểm của AD, CD thì BM⊥AN



MN là đường trung bình của tam giác ACD => MN//AC; AC⊥AB => MN⊥AB

Tam giác ANB có MN⊥AB, AM⊥BN nên M là trực tâm tam giác ANB => BM⊥AN

- Nếu AN, BM là phân giác $\widehat{CAD}$; $\widehat{ABC}$ thì AN⊥BM

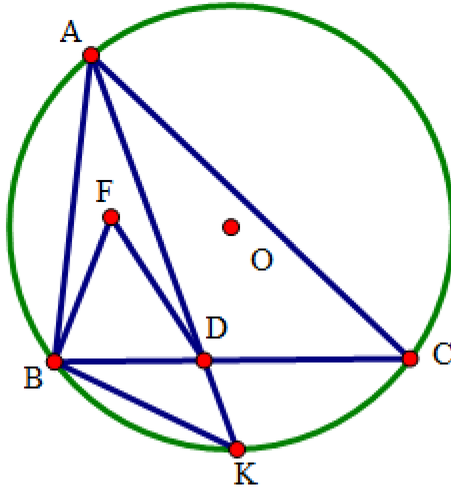
AN, BM là phân giác nên $\frac{CA}{AD} = \frac{CN}{ND}$; $\frac{AM}{DM} = \frac{BA}{BD}$

Mặt khác; ΔACD~ΔBAD nên $\frac{CA}{AD} = \frac{BA}{BD}$

Do đó, $\frac{CN}{ND} = \frac{AM}{MD}$ => MN//AC

Tương tự phân trên => M là trực tâm tam giác ANB =>AN⊥BM

3.11 Phân giác trong AD cắt (O) tại K => BK là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác ADB



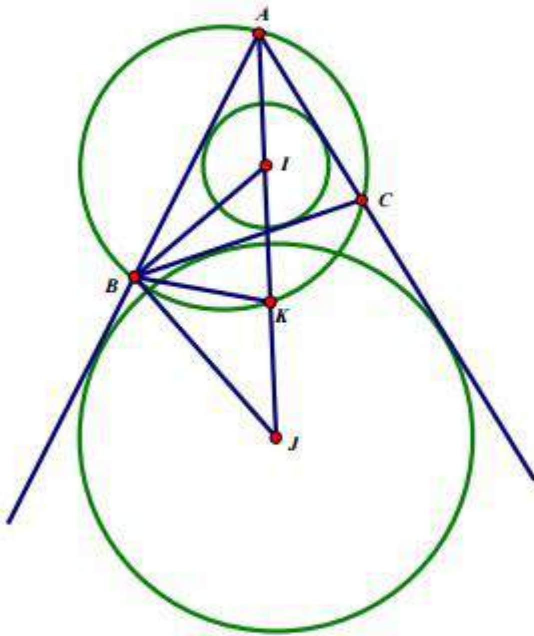
Ta cần chứng minh BE⊥BK

$$\widehat{FBD} = \frac{180^o - \widehat{BFD}}{2} = 90^o - \widehat{BAD}$$

$$\widehat{KBC} = \widehat{KAC} = \widehat{BAD}$$

⇨ $\widehat{FBD} + \widehat{KBC} = 90^o$ => đ.p.c.m

3.12 Phân giác trong AD cắt đường tròn (O) tại K=> I và J đối xứng với nhau qua K



Đường tròn bàng tiếp có tâm J là giao của 1 đường phân giác trong và 2 đường phân giác ngoài của tam giác ABC => có 3 đường tròn bàng tiếp

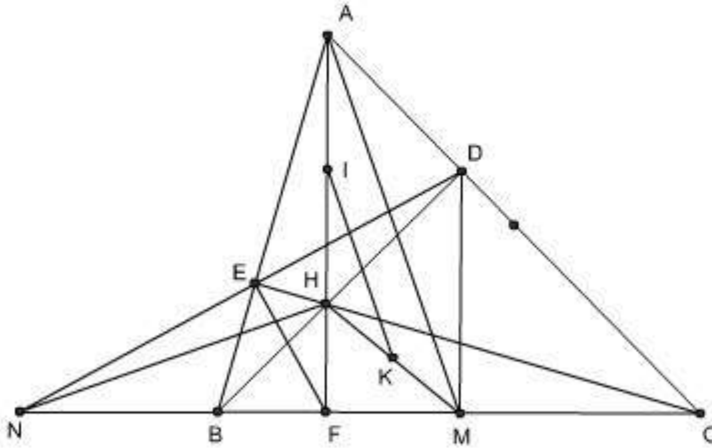
A,I,J cùng nằm trên đường phân giác trong góc A => A, I, J thẳng hàng

BI, BJ là 2 đường phân giác của 2 góc kề bù => BI⊥BJ => tam giác BIJ vuông tại B

Theo 3.8, K là tâm đường tròn ngoại tiếp BIC => KB=KI

⇨ K là trung điểm IJ => KI=KJ

3.13 Trung tuyến AM, 2 đường cao BD, CE. DE cắt BC tại N => NH⊥AM



Gọi I, K là trung điểm AH, HM

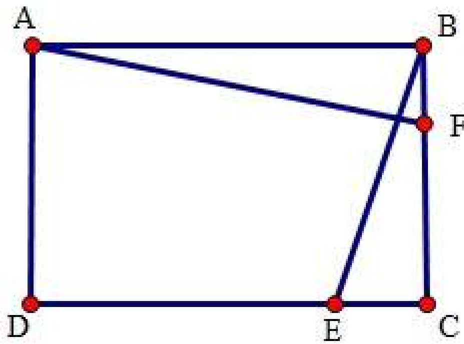
- ⇨ I là tâm đường tròn ngoại tiếp AEHD (do $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^o$)
  Và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMF($\widehat{HFM} = 90^o$)

Và đường tròn tâm I, tâm K cắt nhau tại H, N => NH là trục đẳng phương của 2 đường tròn tâm (I), (K)

- ⇨ NH⊥AM

❖ Bổ đề trong hình vuông, hình chữ nhật…

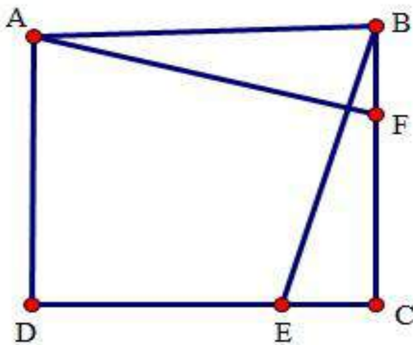
1. AF⊥BE, trong đó E∈CD, F∈BC thỏa mãn $\frac{BF}{CE} = \frac{AB}{BC}$



ΔABF~ΔBCE (do có $\widehat{ABF} = \widehat{BCE} = 90^o$; $\frac{BF}{CE} = \frac{AB}{BC}$)

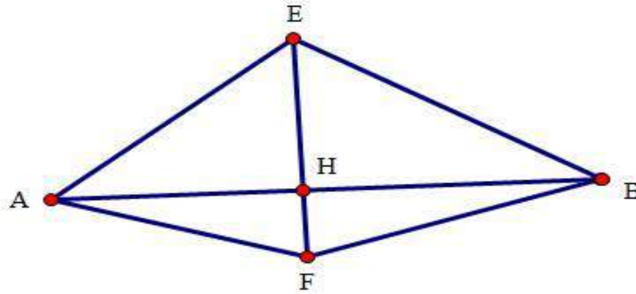
- ⇨ $\widehat{BAF} = \widehat{CBE}$; lại có $\widehat{BAF} + \widehat{BFA} = 90^o$
- ⇨ $\widehat{BFA} + \widehat{CBE} = 90^o$ => BE⊥AF

Chú ý: - Khi AB=BC, tức ABCD là hình vuông, nếu có BF=CE ta cũng có AF⊥BE



Trường hợp, E, F lần lượt là trung điểm của CD, BC => BF=CE=AB/2 => AF⊥BE

2. Tính chất AB⊥EF ⇔$AE^2 - BE^2 = AF^2 - BF^2$



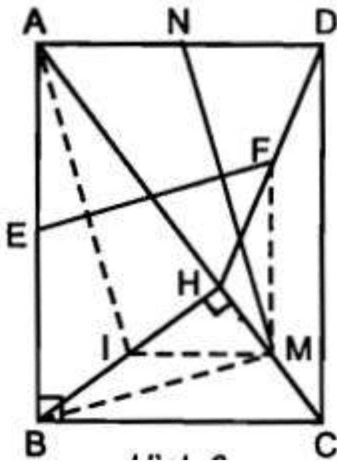
Áp dụng định lý Py-ta-go: $AE^2 = AH^2 + EH^2; BE^2 = EH^2 + BH^2$ =>$AE^2 - BE^2 = AH^2 - BH^2$

Tương tự, ta có $AF^2 - BF^2 = AH^2 - BH^2$

Dó đó, $AE^2 - BE^2 = AF^2 - BF^2$

3. Hệ quả của bổ đề tam giác 3.10

E, F, N, M, I lần lượt là trung điểm của AB, DH, AD, CH, BH



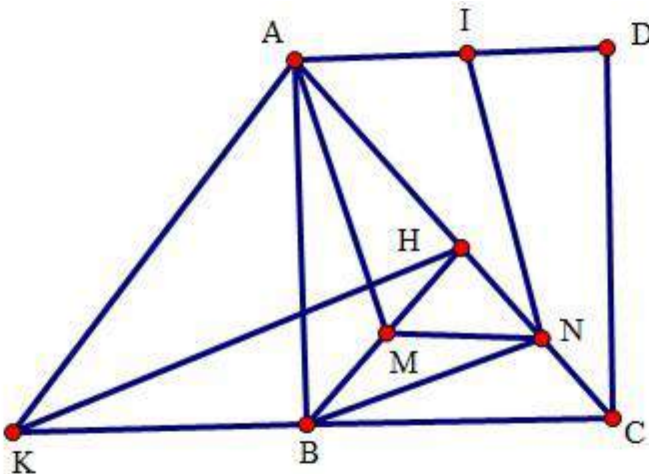
I, M là trung điểm của BH, CH => bổ đề 3.10, AI⊥BM

MI là đường trung bình của tam giác HBC => MI//BC//AD và MI=$\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD = AN$

- ⇨ AIMN là hình bình hành => AI//MN
- ⇨ MN⊥BM

Tương tự, chứng minh được EFMB là hình bình hành => BM//EF => AI⊥EF Và EF⊥MN

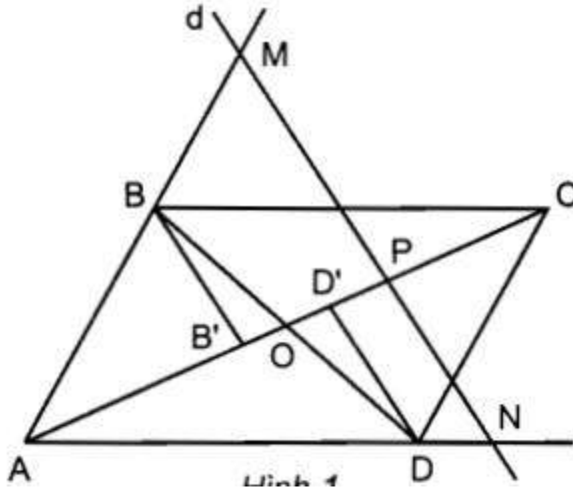
4. KH⊥IN, K là điểm đối xứng của C qua B, M,N,I là trung điểm của BH, CH, AD



Theo bổ đề 4, AM⊥BN, AINM là hình bình hành => AM//IN
BN là đường trung bình của tam giác HCK nên BN//KH
Do đó, KH⊥IN

5. $\frac{AB}{AM} + \frac{AD}{AN} = \frac{AC}{AP}$

Đường thẳng d bất kì cắt AB, AC, AD lần lượt tại M, P, N



Kẻ BB’//DD’//d

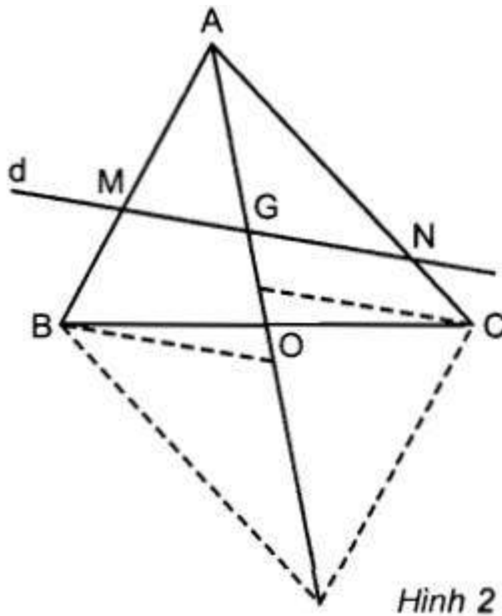
Theo định lý ta-let: $\frac{AB}{AM}=\frac{AB'}{AP}$; $\frac{AD}{AN}=\frac{AD'}{AP}$

ABCD là hình bình hành, BB’//DD’ nên AB’=CD’

Do đó, AB’+AD’=AD’+D’C=AC =>$\frac{AB}{AM}+\frac{AD}{AN}=\frac{AB'}{AP}+\frac{AD'}{AP}=\frac{AB'+AD'}{AP}=\frac{AC}{AP}$

Nếu d đi qua điểm O thì ta luôn có $\frac{AB}{AM}+\frac{AD}{AN}=2$

6. Đường thẳng d bất kì cắt AB,AC , trung tuyến AO tại M, N, G

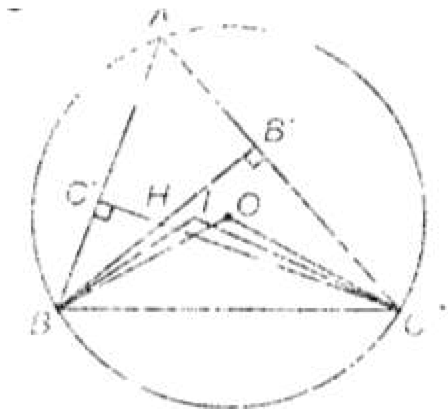


Hình 2

Áp dụng bổ đề 5, dựng hình bình hành ABDC =>$\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=\frac{AD}{AO}=\frac{2AO}{AG}$

Nếu G là trọng tâm, ta luôn có: $\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=3$

7. B, H, I, O, C cùng nằm trên đường tròn nếu $\widehat{BAC}=60^o$



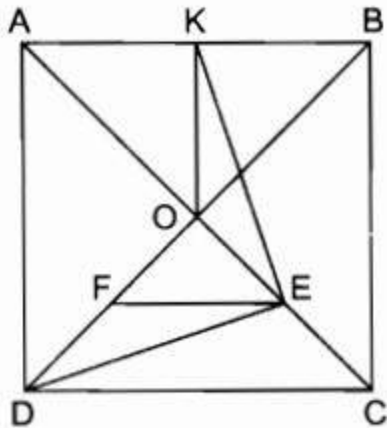
Ta có các công thức sau: $\widehat{BIC}=90^o+\frac{\widehat{BAC}}{2}=120^o$; $\widehat{BOC}=2\widehat{BAC}=120^o$

$\widehat{ABH}=90^o-\widehat{BAC}=30^o$ =>$\widehat{BHC}=\widehat{ABH}+\widehat{HCB}=30^o+90^o=120^o$

$do\ đó, \widehat{BHC}=\widehat{BIC}=\widehat{BOC}=120^o$ => B, H, I, O, C cùng thuộc 1 đường tròn

8. DE⊥KE

F, E, K là trung điểm của AB, DO, CO



Vì EF là đường trung bình của ΔOCD nên $EF = \frac{1}{2}DC$.

Mà $OK = \frac{1}{2}AB$ (do OK là đường trung tuyến của ΔOAB vuông cân) nên EF = OK.

Mặt khác ta có DF = OE;

$\widehat{DFE} = 180^o - \widehat{OFE} = 135^o = \widehat{EOK}$.

Suy ra $\Delta DFE = \Delta EOK$ (c-g-c).

Do đó $\widehat{FDE} = \widehat{OEK}$

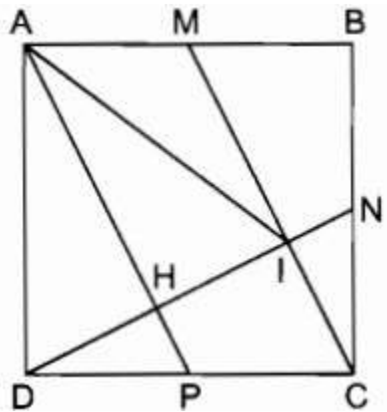
$\Rightarrow \widehat{DEK} = \widehat{DEO} + \widehat{OEK} = \widehat{DEO} + \widehat{FDE}$

$= \widehat{AOD}$ (tính chất góc ngoài của tam giác)

$= 90^o$ hay $KE \perp DE$ (đpcm).

9. AI=AD

M, N là trung điểm của AB, BC. AN cắt CM tại I



Gọi P là trung điểm CD

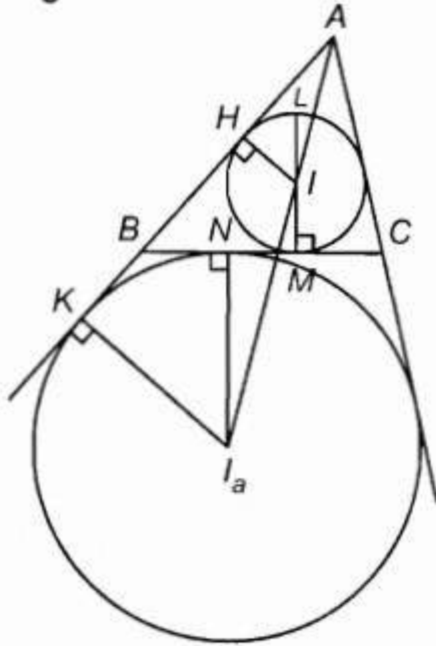
AP cắt DN tại H. theo bổ đề 1, DN⊥CM

Dễ thấy AMCP là hình bình hành => AP//CM hay PH//CI, mà P là trung điểm DC nên H là trung điểm DI

AP//CM => AP⊥DN

Do đó, AP vừa là trung tuyến , vừa là đường cao => tam giác ADI cân tại A => AD=AI

10. A, L, N thẳng hàng



I, I_a là tâm đường tròn nội tiếp, và bàng tiếp góc A tiếp xúc với BC lần lượt tại M, N. L đối xứng với M qua I => A, I, I_a thẳng hàng (1)

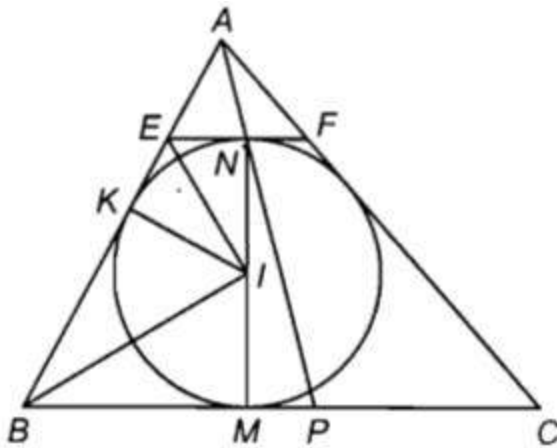
Lại có: $\begin{cases} IL \perp BC \\ I_aN \perp BC \end{cases}$ => IL//I_aN (2)

H, K là tiếp điểm của (I), (I_a) với AB

⇨ $\frac{IL}{I_aN} = \frac{IH}{I_aK} = \frac{IA}{I_aA}$ (do IH//I_aK) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra A, L, N thẳng hàng

11. BM=CP



Đường tròn nội tiếp tâm I, tiếp xúc với BC tại M. Kẻ đường kình Mn. AN cắt BC tại P

Kẻ tiếp tuyến của (I) tại N, cắt AB, AC tại E, F. K là tiếp điểm của (I) với AB

⇨ IE là phân giác góc $\widehat{KIN}$

Có IB là phân giác góc $\widehat{KIM}$

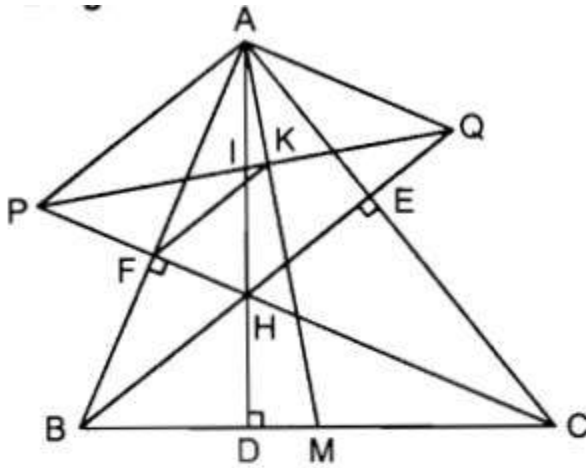
$\widehat{KIN} + \widehat{KIM} = 180^o$ nên $\widehat{EIB} = 90^o$=>ΔBIE vuông tại I có IK là đường cao =>$r^2 = IK^2 = KE.KB = NE.MB$

Tương tự, $r^2 = NF.MC$

Do đó, NE.MB=NF.MC =>$\frac{NE}{MC} = \frac{NF}{MB} = \frac{NE+NF}{MC+MB} = \frac{EF}{BC}$

Lại có EF//BC nên $\frac{NF}{CP} = \frac{EF}{BC}$Do đó CP=BM

12. AM⊥PQ



AD, BE, CF là 3 đường cao hạ từ A, B, C. Đường thẳng qua A song song BE cắt CF tại P. Đường thẳng qua A song song CF cắt BE tại Q

⇨ APHQ là hình bình hành. Gọi I là tâm giao của AH và PQ => I là trung điểm AH

Có: $\widehat{ABC} = \widehat{AHP}$ (do tứ giác BFHD nội tiếp)

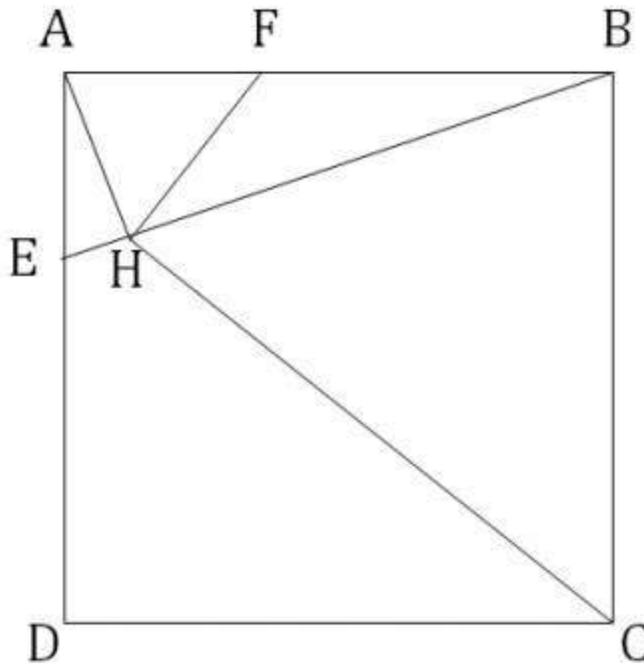
$$\widehat{APH} = \widehat{BAC}\ (do\ phụ\ với\ 2\ góc\ \widehat{PAF} = \widehat{BAE})$$

do đó, $\Delta ABC \sim \Delta PHA$ (g-g) có I , M là trung điểm AH và BC

=> $\Delta PIH \sim \Delta AMB$ =>$\widehat{PIH} = \widehat{AMD}$ => IKMD nội tiếp =>$\widehat{IKM} = 90^o$

$$=> đpcm$$

13. CH⊥HF



F, E thuộc AB, AD thỏa mãn AF=AE. H là hình chiếu của A lên BE

Xét ΔAHF và ΔBHC có:

$$\widehat{HAF} = \widehat{AEH} = \widehat{HBC}$$

$$\frac{AH}{AE} = \frac{BH}{BA} => \frac{AH}{AF} = \frac{BH}{BC}$$

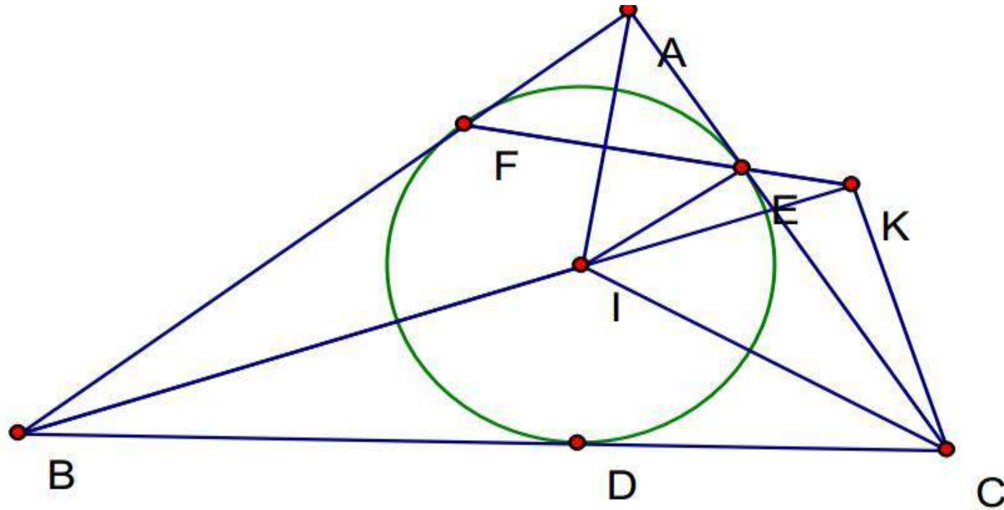
⇨ ΔAHF~ΔBHC (c-g-c)

⇨ $\widehat{AHF} = \widehat{BHC}$

Mà $\widehat{AHF} + \widehat{FHB} = 90^o$ nên $\widehat{BHC} + \widehat{FHB} = 90^o$

⇨ HF⊥HC

14. $\widehat{BKC} = 90^o$



D, E, F là tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. EF cắt BI tại K

Ta có $\widehat{BIC} = 90^o + \frac{\widehat{BAC}}{2}$ =>$\widehat{KIC} = 90^o - \frac{\widehat{BAC}}{2}$

$\widehat{KEC} = \widehat{AEF} = \frac{180^o - \widehat{BAC}}{2}$ =$90^o - \frac{\widehat{BAC}}{2}$

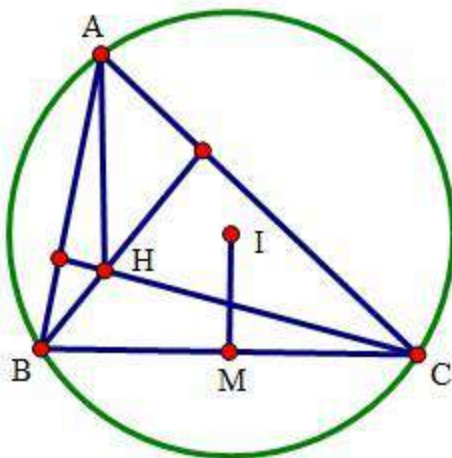
Do đó, $\widehat{KIC} = \widehat{KEC}$ => Tứ giác EKCI nội tiếp, có $\widehat{IEC} = 90^o$ nên $\widehat{IKC} = 90^o$

⇨ Đpcm

Bài tập áp dụng

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm H(1;3), tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là I(2;0) và điểm A(3;4). Viết phương trình đường thẳng BC

Giải



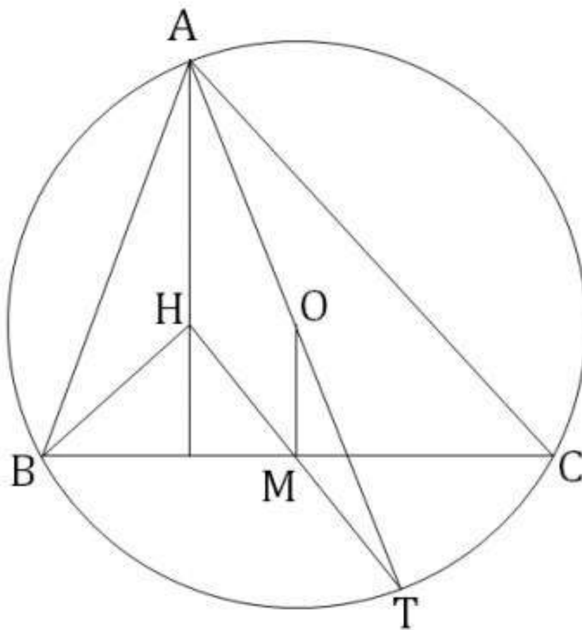
$\overrightarrow{AH}$ =(-2;-1)

H là trực tâm => AH⊥BC => VTPT của BC là $\overrightarrow{AH} = (-2;-1)$ hay $\overrightarrow{n_{BC}}$=(2;1)

Ta cần tìm thêm tọa độ một điểm thuộc BC. Điểm này có thể là chân hình chiếu của A lên BC, có thể là trung điểm của BC, hay có thể là giao của AI với BC

Quan sát dữ kiện đề bài, xuất hiện A, H, I (tâm ngoại tiếp), ta liên hệ ngay tới **bổ đề:**

Mối quan hệ trực tâm H và tâm O: $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$



Gọi M là trung điểm BC, T đối xứng với A qua O => AT là đường kính đường tròn tâm O

B, C thuộc đường tròn đường kính AT nên BA⊥BT; CA⊥CT (1)

H là trực tâm nên BA⊥CH; CA⊥BH (2)

Từ (1) và (2) suy ra CH//BT; BH//CT => BHCT là hình bình hành, có M là trung điểm đường chéo BC nên M cũng là trung điểm đường chéo HT; O là trung điểm AT => OM là đường trung bình của tam giác AHT

⇨ $\begin{cases} OM//AH \\ AH = 2OM \end{cases}$ =>$\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$

Từ đó, ta nhận ra phải đi tìm tọa độ điểm M:

Áp dụng bổ đề:$\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$=(-2;-1) ⇔$\begin{cases} 2(x_M - x_I) = -2 \\ 2(y_M - y_I) = -1 \end{cases}$⇔$\begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = -\frac{1}{2} \end{cases}$=> M(1;$-\frac{1}{2}$)

Do đó, phương trình đường thẳng BC qua M(1;-$\frac{1}{2}$), có vtpt $\overrightarrow{n_{BC}}$=(2;1) là:

(BC): 2(x-1)+1.(y+$\frac{1}{2}$)=0 ⇔ (BC): 2x+y- $\frac{3}{2}$=0

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông ABCD cạnh a=1. M, N là trung điểm của AB, BC. Biết phương trình đường thẳng CM, DN lần lượt là x+y-2=0; x+2y-3=0. Tìm tọa độ A biết A thuộc d: x-2y+3=0

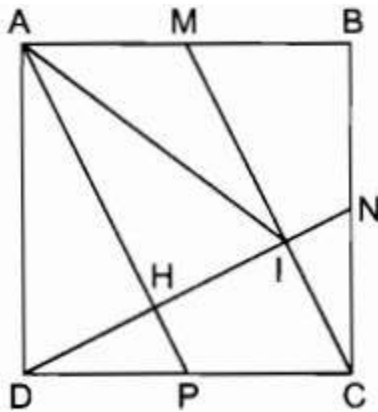
Giải

Tham số hóa A(2t-3;t) => cần tìm thêm 1 phương trình liên quan

Gọi I là giao điểm của CM, DN => I(1;1). Ta có **bổ đề** sau:

AD=AI

M, N là trung điểm của AB, BC. AN cắt CM tại I



Gọi P là trung điểm CD

AP cắt DN tại H. theo bổ đề 1, DN⊥CM

Dễ thấy AMCP là hình bình hành => AP//CM hay PH//CI, mà P là trung điểm DC nên H là trung điểm DI

AP//CM => AP⊥DN

Do đó, AP vừa là trung tuyến , vừa là đường cao => tam giác ADI cân tại A => AD=AI

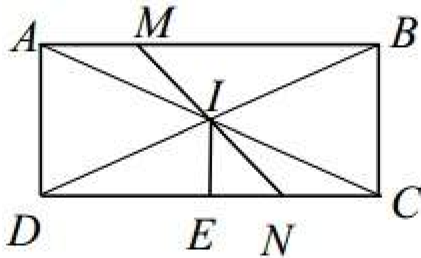
Áp dụng bổ đề:

1=AD=AI=$\sqrt{(2t-4)^2+(t-1)^2}$⇔ t=1 hoặc t=8

⇨ A(-1;1) hoặc A(13;8)

Ví dụ 3: (Khối A-2009) Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm I(6;2) là giao của 2 đường chéo AC và BD. Điểm M(1;5) thuộc cạnh AB và trung điểm E của CD thuộc đường thẳng Δ: x+y-5=0. Viết phương trình đường thẳng AB

Giải



Viết phương trình đường thẳng AB, biết đi qua M(1;5). Ta cần tìm vectơ pháp tuyến của nó (có thể tìm thêm 1 điểm khác thuộc AB nhưng không khả thi)

Nhận thấyIE⊥CD//AB => IE⊥AB , đã biết điểm I => cần tìm điểm E sẽ suy ra được vtpt của AB. Điểm E thuộc Δ:x+y-5=0 => tham số hóa E(t;5-t) => cần tìm thêm 1 phương trình

Khi đã biết tọa độ tâm I, ta nghĩ ngay đến tính chất đối xứng của hình chữ nhật:

Cho hình chữ nhật ABCD có tâm I. Nếu M∈AB, N đối xứng với M qua I thì N∈CD

Do đó, N có tọa độ $\begin{matrix} 2x_I - x_M = 11 \\ 2y_I - y_M = -1 \end{matrix}$ => N(11;-1)

Từ đó, ta có 1 phương trình liên qua đến t là: $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EN} = 0$

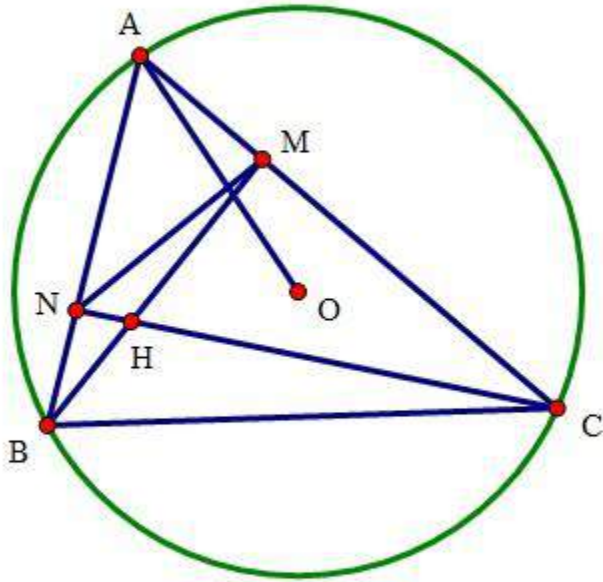
$\overrightarrow{EI} = (6-t; t-3)$; $\overrightarrow{EN} = (11-t; t-6)$

⇨ $(6-t).(11-t) + (t-3).(t-6) = 0 => \begin{matrix} t = 6 \\ t = 7 \end{matrix}$

- Nếu t=6 =>$\overrightarrow{EI} = (0;3)$ => (AB): 3(y-5)=0
- Nếu t=7 =>$\overrightarrow{EI} = (-1;4)$ => (AB): -1(x-1)+4(y-5)=0 ⇔ (AB) –x+4y-19=0

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) $x^2 + y^2 = 25$ ngoại tiếp tam giác nhọn ABC có chân các đường cao hạ từ B, C lần lượt là M(-1;-3); N(2;-3). Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $y_A < 0$

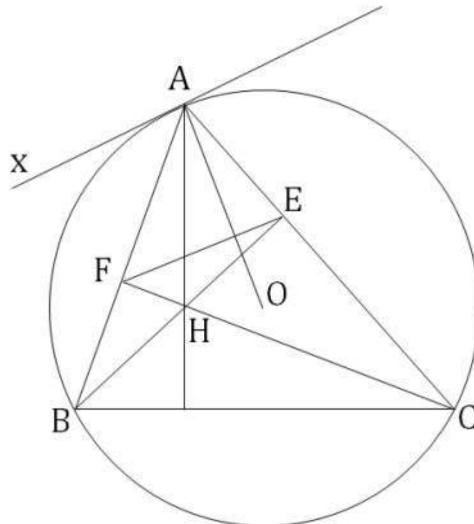
Giải



Biết $y_A < 0$ => tìm tọa độ điểm A trước

Xuất hiện 2 chân đường vuông góc và tâm ngoại tiếp, ta nghĩ đến **bổ đề:**

Tính chất AO⊥EF



BE, CF là 2 đường cao hạ từ B, C. Kẻ tiếp tuyến tại A của đường tròn tâm O

⇨ $\widehat{xAB} = \widehat{ACB}$

$\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^o$ => BFEC là tứ giác nội tiếp =>$\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$

Do đó, $\widehat{xAB} = \widehat{AFE}$ => Ax//EF mà AO ⊥Ax nên AO⊥EF

Áp dụng,ta có MN⊥AO ; $\overrightarrow{MN} = (3;0)$ => VTPT của AO là $\overrightarrow{n_{AO}} = (3;0)$

AO qua O(0;0), có vtpt $\overrightarrow{n_{AO}} = (3;0)$

- ⇨ (AO): x=0
- ⇨ Tọa độ điểm A là giao của đường tròn © với AO: $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -5 \end{cases} (do\ y_A < 0)$
- ⇨ Phương trình AN: x-y-5=0
- ⇨ Phương trình AM: 2x+y+5=0

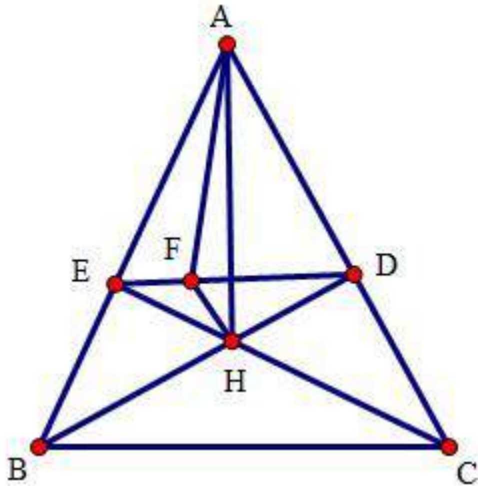
Điểm B, C là giao của AN, AM với đường tròn ©:

$$\begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} => B(5; 0)$$

$$\begin{cases} 2x + y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} => C(-4; 3)$$

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng tọa độ, cho tam giác ABC cân tại A, trực tâm H(-3;2). Gọi D, E lần lượt là chân đường cao hạ từ B, C. Biết A nằm trên đường thẳng d: x-3y-3=0. Điểm F(-2;3) thuộc đường thẳng DE và HD=2. Tìm tọa độ điểm A

Giải



A∈(d): x-3y-3=0 => A(3t+3;t)

Ta cần tìm thêm 1 phương trình liên quan đến A

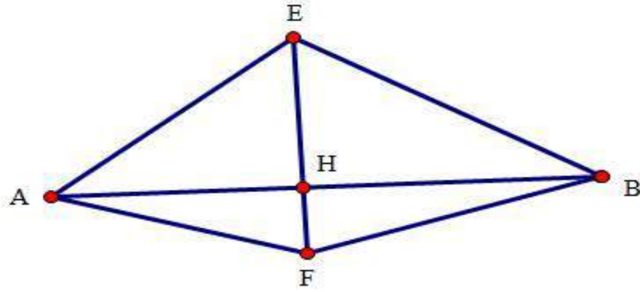
Tam giác ABC cân tại A, D, E là chân đường cao hà từ B, C => DE//BC

H là trực tâm => AH⊥BC

- ⇨ AH⊥DE hay AH⊥DF

Sử dụng bổ đề sau:

Tính chất AB⊥EF ⇔$AE^2 - BE^2 = AF^2 - BF^2$



Áp dụng định lý Py-ta-go: $AE^2 = AH^2 + EH^2; BE^2 = EH^2 + BH^2$ =>$AE^2 - BE^2 = AH^2 - BH^2$

Tương tự, ta có $AF^2 - BF^2 = AH^2 - BH^2$

Dó đó, $AE^2 - BE^2 = AF^2 - BF^2$

Áp dụng:$FA^2 - FH^2 = DA^2 - DH^2$

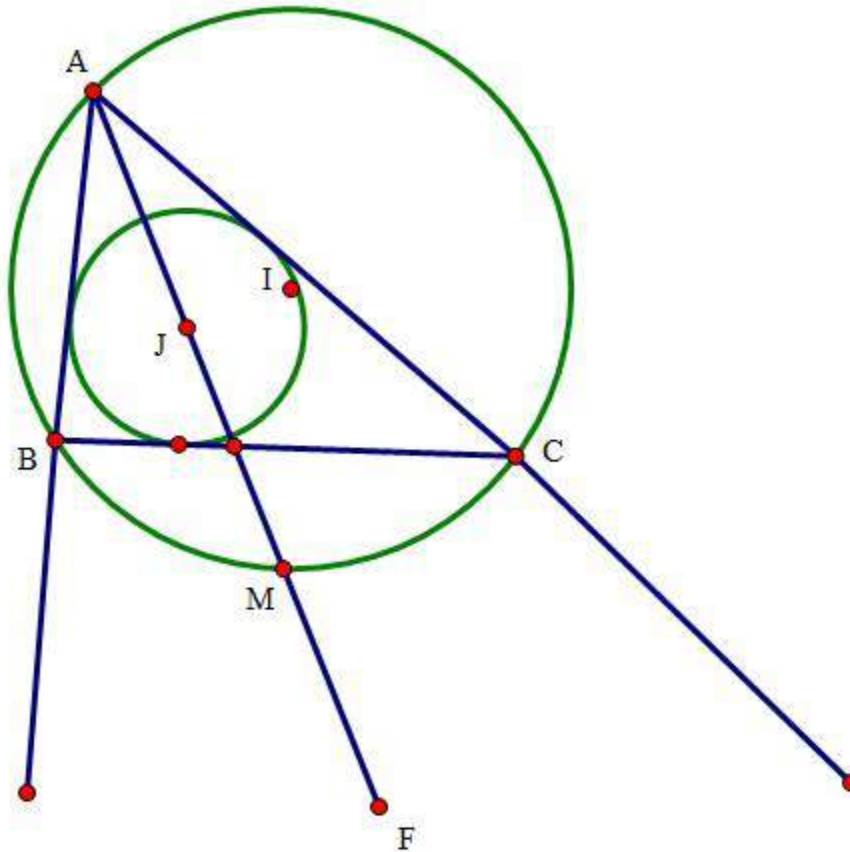
Theo Py-ta-go: $DA^2 = AH^2 - DH^2$ =>$FA^2 - FH^2 = AH^2 - 2DH^2$

Biết tọa độ F, H, tham số hóa A, đoạn DH => ta được 1 phương trình của t:

$(3t + 5)^2 + (t - 3)^2 - 2 = (3t + 6)^2 + (t - 2)^2 - 8$⇔ t=0 => A(3;0)

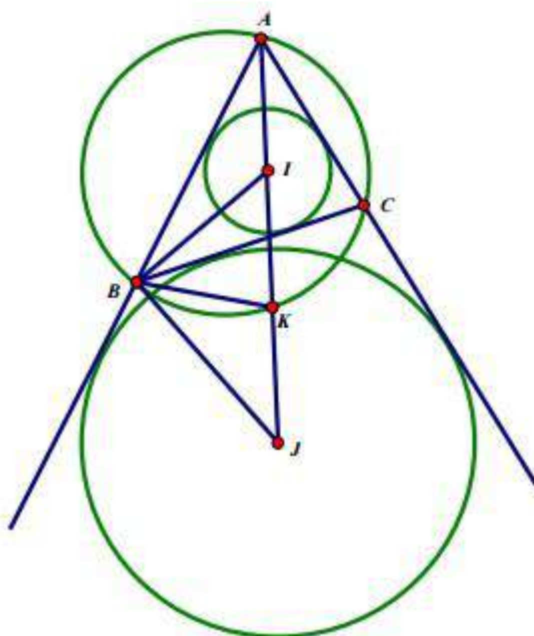
Ví dụ 6: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có các điểm I(1;-1) và J(1;0) lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC, đường tròn bàng tiếp góc A có tâm F(2;-8). Tìm tọa độ của các đỉnh của tam giác biết đỉnh A có tung độ âm

Giải



Bổ đề liên quan đến đường tròn bàng tiếp:

Phân giác trong AD cắt đường tròn (O) tại K=> I và J đối xứng với nhau qua K



- Đường tròn bàng tiếp có tâm J là giao của 1 đường phân giác trong và 2 đường phân giác ngoài của tam giác ABC => có 3 đường tròn bàng tiếp

A,I,J cùng nằm trên đường phân giác trong góc A => A, I, J thẳng hàng

BI, BJ là 2 đường phân giác của 2 góc kề bù => BI⊥BJ => tam giác BIJ vuông tại B

Theo 3.8, K là tâm đường tròn ngoại tiếp BIC => KB=KI

⇨ K là trung điểm IJ => KI=KJ

Áp dụng bổ đề:

Hướng: Tọa độ A là giao của đường tròn ngoại tiếp tâm I với JF

Gọi M là trung điểm của JF => M thuộc đường tròn ngoại tiếp tâm I của tam giác ABC

M($\frac{3}{2}; -4$) => đường tròn tâm ngoại tiếp tam giác ABC có tâm I(1;-1), bán kính

IM=$\sqrt{(\frac{3}{2}-1)^2+(-4+1)^2} = \frac{\sqrt{37}}{2}$ => phương trình đường tròn tâm I là: $(x-1)^2+(y+1)^2 = \frac{37}{4}$

Phương trình đường thẳng JF là: $\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-0}{-8-0}$⇔ 8x+y-8=0

Tọa độ điểm A thỏa mãn là giao của đường tròn ngoại tiếp ABC với đường thẳng JF:

$\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2 = \frac{37}{4}\\ 8x+y-8=0\end{cases}$ ⇔ x=$\frac{3}{2}$ hoặc x=$\frac{97}{130}$

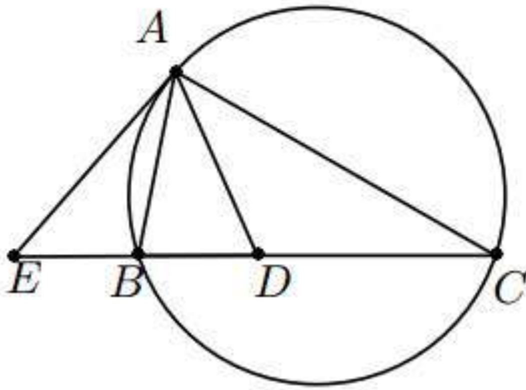
Nếu x=$\frac{3}{2}$ thì y=-4 (thỏa mãn)

Nếu x=$\frac{97}{130}$ thì y>0 (loại)

Vậy A($\frac{3}{2}; -4$)

Ví dụ 7:(Khối D-2014) Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có chân đường phân giác góc A là D((1;-1). Đường thẳng AB có phương trình 3x+2y-9=0. Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp ABC có phương trình x+2y-7=0. Viết phương trình đường thẳng BC.

Giải



BC đi qua D(1;-1). Ta có 2 hướng: tìm vtpt hoặc tìm 1 điểm khác D thuộc BC

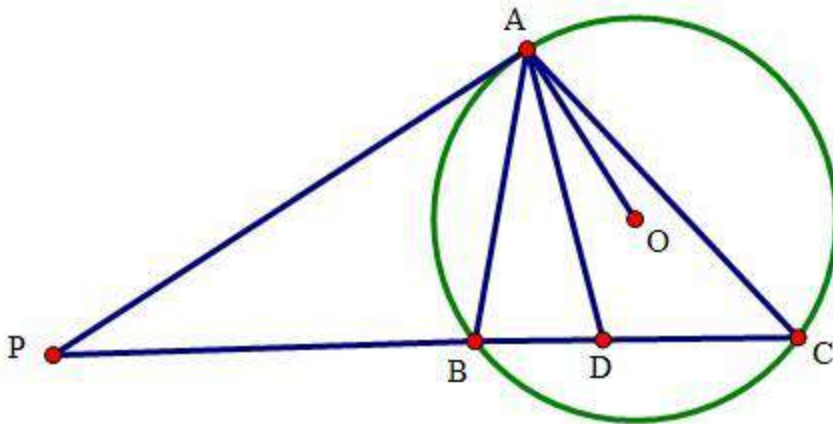
- Hướng tìm vtpt không khả quan do thiếu các yếu tố về vuông góc
- Đi theo hướng 2, tìm điểm khác D thuộc BC

Gọi E là giao điểm của tiếp tuyến tại A của đướng tròn ngoại tiếp ABC với BC => (AE): x+2y-7=0

Dễ dàng tìm được tọa độ A: $\begin{matrix} 3x+2y-9=0 \\ x+2y-7=0 \end{matrix}$ ⇔ A(1;3)

Ta sử dụng bổ đề sau:

Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại P. AD là phân giác trong góc A => PA=PD



$\widehat{PAD}=\widehat{PAB}+\widehat{BAD}=\widehat{ACB}+\widehat{DAC}=\widehat{ADP}$ => tam giác PAD cân tại P => PA=PD

Áp dụng bổ đề:

EA=ED => E thuộc đường trung trực của AD

Phương trình đường thẳng AD: x=1 => phương trình trung trực AD có dạng y=m

Trung trực Δ của AD qua điểm N là trung điểm AD, có tọa độ N(1;1) nên m=1

⇨ (Δ): y=1

Điểm E là giao của AE và (Δ): $\begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ ⇔ E(5;1)

⇨ Phương trình BC: $\frac{x-1}{5-1} = \frac{y+1}{1+1}$ ⇔ (BC): x-2y-3=0

****

Chào các em, như vậy là các em đã đọc đến trang cuối cùng của “Bí Kíp Oxy cửu âm chân kinh” mà anh và anh Nguyễn Văn Nam đã dày công biên soạn.

Để viết tài liệu này mất rất là nhiều thời gian và tâm huyết, hi vọng sẽ đem lại những kinh nghiệm quý báu cho các em, giúp các em làm tốt câu Oxy trong đề THPT Quốc Gia